



СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ АМБАРЦУМЯН

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐ

Նվիրվում է ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս
Ս. Ա. Համբարձումյանի ծննդյան 95-ամյակին

ԵՐԵՎԱՆ – 2017

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF
ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

PROBLEMS OF MECHANICS OF DEFORMABLE
SOLID BODY

Dedicated to the 95th anniversary of academician of NAS RA
SERGEY A. AMBARTSUMIAN

YEREVAN – 2017

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ**

**ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА**

Посвящается 95-летию
академика НАН РА С.А. АМБАРЦУМЯНА



ЕРЕВАН
Издательство «Гитутюн» НАН РА
2017

**Печатается по решению Учёного Совета
Института механики НАН РА**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Аветисян А.С. (главный редактор), Акопян В.Н. (зам. главного редактора),
Агаловян Л.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В., Гукасян А.А., Киракосян
Р.М., Казарян К.Б., Мовсисян Л.А., Мхитарян С.М., Саркисян С.В., Саркисян
С.О., Авдалян Ж.А. (ответ.секретарь), Геворкян Г.З. (техн.редактор)

**Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван,
Издательство «Гитутюн» НАН РА. 2017, 191с.**

В сборник включены работы по проблемам механики деформируемого
твёрдого тела и смежным задачам.

© Институт механики НАН РА, 2017

Вместо предисловия

Амбарцумян Сергей Александрович родился 17 марта 1922 года в Армении в городе Александрополе (ныне Гюмри).

Цитаты из профессиональных научных изданий (ПММ, МТТ, Вестник РАН):

“Крупному советскому учёному-механику, основателю новых научных направлений в области теории пластин и оболочек, одному из создателей научной школы механики в Армении С.А. Амбарцумяну исполнилось шестьдесят лет. Его труды по теории прочности, устойчивости и колебаниям анизотропных слоистых оболочек и пластин, по разномодульной теории упругости, по электромагнитоупругости тонких тел широко известны во всем мире и являются существенным вкладом в мировую науку”.

“С.А. Амбарцумян и его ученики Г.Е.Багдасарян и М.В.Белубекян по праву считаются основоположниками общей теории электромагнитоупругости тонких тел”.

“Полученные С.А. Амбарцумяном научные результаты нашли широкое приложение при создании объектов современной техники, в частности, при решении проблем оптимального проектирования тонкостенных конструкций”.

“Практически, во всех диссертациях отечественных авторов, посвящённых разработке различных вариантов теории трёхслойных оболочек, для оценки области применимости и достоверности теории проводилось сравнение с работами Е.Рейснера, С.А. Амбарцумяна и Э.И. Григолюка”.

Хочу привести несколько цитат из его автобиографии.

“Он был членом многих академий, почётным доктором и почётным профессором университетов. Однако, он любил своё звание профессора. Он от природы был педагогом”.

“Он знал, что человек силен, если опирается на родную землю”.

“Он говорил: чтобы долго и молодо жить, надо правильно стариться, неустанно творить, честно любить, никому не завидовать и жить в окружении красивого”.

“Он знал, что творчество – это самовыражение, а не шумная реклама”.

Его крылатое слово: “Уходя, не гаси Свет”.

Он – наш учитель в широком смысле этого слова.

Ара Сергеевич Аветисян – главный редактор сборника

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ НА КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ ФЛАТТЕРА И НА АМПЛИТУДУ ФЛАТТЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е.

Ключевые слова: волны Релэ, поперечные сдвиги, нелинейный флаттер

Keywords: Rayleigh waves, transversal shears, non-linear flutter

Аннотация. Рассматривается задача нелинейного флаттера ортотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Делается попытка определить влияния поперечных сдвигов на характеристики флаттера.

Задача решается приближённо в нелинейной постановке при помощи вариационных методов.

Ambartsumian S.A., Baghdasaryan G.Y.

Influence of transversal shears on the critical speed and on the amplitude of flutter type oscillations

Abstract. The problem of nonlinear flutter of orthotropic rectangular plate, which is placed in a supersonic gas flow, is considered. An attempt is made to determine the influence of transversal shears on the flutter characteristics. The problem is solved approximately in a nonlinear formulation by means of variational methods.

Введение

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1,5,6] и в обзорной статье [10]. Нелинейные задачи решены приближёнными методами и предметом исследований, в основном, было изучение зависимости амплитуды A колебаний от скорости обтекающего потока, когда величина скорости потока находится в достаточно малой окрестности критической скорости флаттера. Эти вопросы, связанные с изучением свойств функции $A(v)$, в задачах флаттера, когда пластинка обтекается с двух сторон с равными скоростями, детально исследованы в работах [5], где показано, что нелинейные флаттерные колебания существуют либо только в докритической стадии, где $A(v)$ – монотонно убывающая функция, либо только при послекритических скоростях, где $A(v)$ – монотонно возрастающая функция. Эти вопросы с указанной точностью (скорость обтекающего потока находится в достаточно малой окрестности критической скорости флаттера) с учётом поперечных сдвигов исследованы в работе [3]. В настоящей работе с учетом поперечных сдвигов исследуются вопросы зависимости амплитуды нелинейных колебаний от величины скорости обтекающего потока как в докритической, так и после критической стадии без указанного выше ограничения на величину скорости сверхзвукового потока.

1. Основные уравнения

Рассмотрим тонкую ортотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h . Пусть материал пластинки подчиняется обобщённому закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями ортогональных координатных линий x_1, x_2, x_3 .

Координатная плоскость $x_3 = 0$ совпадает с срединной плоскостью пластинки, которая отнесена к координатам x_1, x_2 . Третья координатная линия x_3 представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(x_1, x_2, 0)$ до точки (x_1, x_2, x_3) пластинки.

Пусть, далее, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с постоянной невозмущённой скоростью $\vec{U}$, направленной вдоль оси Ox_1 . Для исследования рассматриваемой задачи аэроупругой устойчивости в основу принимаются следующие известные предположения:

1) нормальные к срединной поверхности пластинки перемещения u_3 не зависят от координаты x_3

$$u_3 = w(x_1, x_2, t); \quad (1)$$

2) нормальные напряжения σ_{33} пренебрежимо малы по сравнению с основными напряжениями σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} [3];

3) касательные напряжения τ_{13} и τ_{23} имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= f(x_3)\varphi(x_1, x_2, t), \\ \tau_{23} &= f(x_3)\psi(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi(x_1, x_2, t)$ и $\psi(x_1, x_2, t)$ – искомые функции, $f(x_3)$ – заданная функция типа квадратной параболы, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, причём, $f(\pm h/2) = 0$;

4) давление газа учитывается по приближённой формуле «поршневой теории» [8,11]

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{V_3^2}{a_\infty^2} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \quad (3)$$

где p – давление газа на поверхности пластинки, p_∞ , ρ_∞ и $a_\infty = (\kappa p_\infty / \rho_\infty)^{1/2}$ – давление, плотность и величина скорости звука для невозмущённого потока газа, V_3 – нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки, κ – показатель политропы;

5) пластинка достаточно тонкая и её формы колебания имеют большие показатели изменчивости (влияние тангенциальных составляющих сил инерции пренебрежимо мало);

6) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [6].

В силу второго предположения из уравнений обобщённого закона Гука имеем следующие соотношения между компонентами тензора напряжений $\hat{\sigma}$ и тензора деформаций $\hat{\epsilon}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= B_{11}e_{11} + B_{12}e_{22}, \quad \tau_{12} = B_{66}e_{12}, \\
\sigma_{22} &= B_{12}e_{11} + B_{22}e_{22}, \\
\tau_{13} &= B_{55}e_{13}, \quad \tau_{23} = B_{44}e_{23},
\end{aligned} \tag{4}$$

где B_{ij} – коэффициенты упругости.

Из последних двух уравнений (4), в силу (1), (2) и соотношений для компонентов деформаций, для составляющих вектора перемещений $\vec{u}$ точек пластинки получим выражения:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u(x_1, x_2, t) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} + I_0(x_3) \Phi_1, \\
u_2 &= v(x_1, x_2, t) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} + I_0(x_3) \Phi_2,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$u_3 = w(x_1, x_2, t),$$

где

$$\Phi_1 = B_{55}^{-1} \varphi(x_1, x_2, t), \quad \Phi_2 = B_{44}^{-1} \psi(x_1, x_2, t), \quad I_0(x_3) = \int_0^{x_3} f(\gamma) d\gamma.$$

Используя (1) – (5) и предположения теории гибких пластин из уравнений динамической теории упругости путём их осреднения по толщине пластинки, получим следующие уравнения устойчивости относительно внутренних усилий T_{ik} и моментов

M_{ik} [2]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = T_{13}, \quad \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = T_{23}, \\
\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + Z &= 0, \\
T_{ik} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ik} dx_3, \quad M_{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{ik} dx_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
T_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}, \quad T_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} \\
T_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12}, \quad T_{13} = 2I_0\left(\frac{h}{2}\right)B_{55}\Phi_1, \quad T_{23} = 2I_0\left(\frac{h}{2}\right)B_{44}\Phi_2
\end{aligned} \tag{7}$$

$$M_{11} = D_{11}\varepsilon_{11} + D_{12}\varepsilon_{22} + I_1\left(B_{11}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + B_{12}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}\right)$$

$$M_{22} = D_{12}\varepsilon_{11} + D_{22}\varepsilon_{22} + I_1\left(B_{12}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + B_{22}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}\right)$$

$$M_{12} = D_{66}\mathfrak{a}_{12} + I_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right) \cdot B_{66}, \quad \left(I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \gamma I_0(\gamma) d\gamma \right)$$

– внутренние усилия и моменты;

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (8)$$

$$\mathfrak{a}_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \mathfrak{a}_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \mathfrak{a}_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

– деформации срединной поверхности пластинки, u, v, w – соответственно, тангенциальные и нормальные перемещения точек срединной поверхности;

$$C_{ik} = B_{ik} h, \quad D_{ik} = B_{ik} \frac{h^3}{12}$$

– жёсткости растяжения и изгиба.

Кроме (6), имеет место также следующее уравнение неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \quad (9)$$

Представляя усилия T_{11} , T_{22} и T_{12} посредством функции напряжения $F(x_1, x_2, t)$ обычным образом:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям системы (6), а из остальных уравнений этой системы и из уравнения (9) получим следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений устойчивости пластинки [3]:

$$a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 0, \quad (10a)$$

$$2B_{55}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + 2B_{44}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \\ - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + Z(x_1, x_2, t) = 0, \quad (10b)$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + 2B_{55}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \Phi_1 = \\ = I_1 \left[B_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right], \quad (10c)$$

$$D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 2B_{44} I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \Phi_2 =$$

$$= I_1 \left[B_{22} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right], \quad (10d)$$

где

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}$$

$$a_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad \Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Поперечная нагрузка $Z(x_1, x_2, t)$, входящая в (10b), складывается из сил инерции, сил демпфирования и аэродинамического давления (избыточное давление $\Delta p = p - p_\infty$)

$$Z = -\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_0 h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p,$$

где ρ_0 – плотность материала пластинки, ε – коэффициент линейного затухания, t – время.

Аэродинамическое давление будем вычислять по формуле (3), разлагая её в ряд по степеням малого параметра $\frac{v_3}{a_\infty} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \frac{1}{a_\infty}$. В разложении, согласно предположениям теории гибких пластин, удерживаются лишь первых три члена. В результате, для поперечной нагрузки получается следующее приближённое представление:

$$Z = -\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\rho_0 h \varepsilon + \frac{\varkappa p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} - \varkappa p_\infty \left[M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa + 1}{4} M^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\varkappa + 1}{12} M^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^3 \right], \quad (11)$$

где $M = U / a_\infty$ – число Маха для невозмущённого потока газа.

В представлении (11) из членов, учитывающих аэродинамическое демпфирование, сохранён лишь наиболее существенный линейный член.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (10a) – (10d), где Z определяется согласно (11), присоединяются также условия на контуре пластинки.

2. Влияние поперечных сдвигов на устойчивость

С целью определения влияния учёта поперечных сдвигов на устойчивость рассматриваемой аэроупругой системы, сначала рассмотрим линейную задачу.

Соответствующая (10a) – (10d) линейная система имеет вид:

$$a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0, \quad (12a)$$

$$2B_{55}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + 2B_{44}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + Z = 0, \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] + 2B_{55}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \Phi_1 = \\ = I_1 \left[B_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{66} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^2} \right], \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] + 2B_{44}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) \Phi_2 = \\ = I_1 \left[B_{22} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{66} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (12d)$$

Для наглядности будем рассматривать случай бесконечной пластинки, представляя решение системы (12a) – (12d) в виде

$$(F, \Phi_1, \Phi_2, w) = (F_0, \Phi_{01}, \Phi_{02}, w_0) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad (13)$$

где $F_0, \Phi_{01}, \Phi_{02}, w_0$ – некоторые постоянные, ω – частота колебаний, $k_i = \pi/\lambda_i$ – волновые числа, λ_i – длины полуволен в направлении координатных линий.

Подставляя (13) в (12a)–(12d), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $F_0, \Phi_{01}, \Phi_{02}, w_0$. Из условия совместности этой системы получим следующее характеристическое уравнение:

$$\omega^2 - i(\varepsilon + \varepsilon_a)\omega - \Omega^2(k, n) + ik_1 \varepsilon_a U = 0. \quad (14)$$

Здесь Ω – частота собственных поперечных колебаний пластинки в вакууме

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 (1 - \delta), \quad \varepsilon_a = \frac{\mathfrak{A} p_\infty}{\rho_0 h a_\infty} = \frac{a_\infty \rho_\infty}{\rho_0 h}, \quad (15)$$

Ω_0 – значение указанной частоты, найденное на основе классической теории пластин

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{\rho_0 h} [D_{11} k_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) k_1^2 k_2^2 + D_{22} k_2^4],$$

δ – параметр, учитывающий влияние поперечных сдвигов на частоту собственных колебаний

$$\begin{aligned} \delta = \left[D_{11} k_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) k_1^2 k_2^2 + D_{22} k_2^4 - 2I_0 \left(\frac{h}{2} \right) (B_{55} k_1 P_1 + \right. \\ \left. + B_{44} k_2 P_2) \right] [D_{11} k_1^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) k_1^2 k_2^2 + D_{22} k_2^4]^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{k_1}{Q} \left\{ \left[D_{11}k_1^2 + (D_{12} + 2D_{66})k_2^2 \right] \left[2B_{44}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{22}k_2^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{66}k_1^2) \right] - I_1 (B_{12} + B_{66})k_2^2 \left[D_{22}k_2^2 + (D_{12} + 2D_{66})k_1^2 \right] \right\}, \\
P_2 &= \frac{k_2}{Q} \left\{ \left[D_{22}k_2^2 + (D_{12} + 2D_{66})k_1^2 \right] \left[2B_{55}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{11}k_1^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{66}k_2^2) \right] - I_1 (B_{12} + B_{66})k_1^2 \left[D_{11}k_1^2 + (D_{12} + 2D_{66})k_2^2 \right] \right\}, \\
Q &= \left[2B_{55}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{11}k_1^2 + B_{66}k_2^2) \right] \left[2B_{44}I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{22}k_2^2 + B_{66}k_1^2) \right] - \\
&\quad - I_1^2 (B_{12} + B_{66})^2 k_1^2 k_2^2.
\end{aligned}$$

Частоту колебаний Ω можно определить из уравнения (14). Если её мнимая часть положительна, то невозмущённое состояние пластинки устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие же частот с отрицательной мнимой частью означает неустойчивость. Наименьшее значение U , при котором один из показателей $i\omega$ переходит на правую полуплоскость комплексного переменного, оставаясь при этом комплексным, является критической скоростью флаттера U_{cr} . На границе области устойчивости (при $U = U_{cr}$) частоты Ω принимают действительные значения. На основании этого, из уравнения (14), для критической скорости флаттера получим формулу

$$U_{cr} = \frac{\Omega}{k_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_a} \right), \quad (16)$$

которая внешне совпадает с формулой, полученной на основе классической теории [5]. Наряду с этим, как видно из (15), есть и отличие, которое все больше выявляется с увеличением h/λ , h/R , B_{ik}/B_{44} , B_{ik}/B_{55} [2]. Сказанное становится более наглядным, когда пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала. Для этого случая формула (16) упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned}
U_{cr} &= U_{cr}^0 (1 + d)^{-\frac{1}{2}}, \quad U_{cr}^0 = \frac{\Omega_0}{k_1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_a} \right), \\
d &= \frac{I_1 k^2}{2I_0 (h/2) (1 - \mu^2) G'} = h_* \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right),
\end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\rho_0 h}} k^2, \quad h_* = \frac{\pi^2 h^2}{10 \lambda_2^2 (1 - \mu^2)} \frac{E}{G'}, \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad k_i = \frac{\pi}{\lambda_i}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

В (17) U_{cr}^0 – критическая скорость флаттера, найденная на основе классической теории, d (или h_*) – величина, характеризующая влияние поперечных сдвигов, E – модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии, G' – модуль сдвига для плоскостей, нормальных плоскости изотропии, μ – коэффициент Пуассона.

На основе формулы (17) вычислены значения U_{kp}/U_{kp}^0 при различных h_* и λ_1/λ_2 . Полученные результаты помещены в табл. 1.

Табл. 1 и формула (17) показывают, что а) критическая скорость флаттера уменьшается вследствие учёта поперечных сдвигов; б) с увеличением параметра h_* (параметр h_* учитывает влияние поперечных сдвигов) критическая скорость флаттера U_{kp} все больше отличается от соответствующей скорости U_{kp}^0 , найденной по классической теории пластинок; и в) это влияние становится более существенным в случае коротких волн.

Таблица 1. Значения U_{kp}/U_{kp}^0 для разных значений параметров α и h_* .

$\alpha \backslash h_*$	1	2^{-1}	3^{-1}
0.00	1.00	1.00	1.00
0.02	0.98	0.95	0.91
0.03	0.97	0.93	0.88
0.05	0.95	0.89	0.82
0.07	0.94	0.86	0.77
0.10	0.91	0.82	0.71
0.15	0.88	0.76	0.63
0.20	0.85	0.71	0.58
0.25	0.82	0.67	0.53
0.30	0.79	0.63	0.50

3. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим прямоугольную ($0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$) ортотропную пластинку, шарнирно опёртую по всему контуру. Предположим, что края пластинки свободно смещаются в плане. Тогда, граничные условия будут иметь следующий вид:

при $x_1 = 0$, $x_1 = a$

$$w = 0, \quad M_{11} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + I_1 \left(B_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + B_{12} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (18a)$$

$$T_{12}^0 = 0, \quad T_{11}^0 = 0, \quad \psi = 0, \quad (18b)$$

при $x_2 = 0$, $x_2 = b$

$$w = 0, \quad M_{22} = -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + I_2 \left(B_{12} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + B_{22} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (18c)$$

$$T_{12}^0 = 0, \quad T_{22}^0 = 0, \quad \varphi = 0, \quad (18d)$$

где T_{11}^0 , T_{12}^0 и T_{22}^0 – средние значения соответствующих усилий на кромках пластинки.

Рассматриваемую нелинейную задачу будем решать приближённо, представляя решение системы (10a) – (10d) в виде

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f_{ik}(t) \sin \lambda_i x_1 \cdot \sin \mu_k x_2, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right) \quad (19a)$$

$$\Phi_1(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \Phi_{ik}^{(1)}(t) \cos \lambda_i x_1 \cdot \sin \mu_k x_2, \quad \left(\mu_k = \frac{k\pi}{b} \right) \quad (19b)$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \Phi_{ik}^{(2)}(t) \sin \lambda_i x_1 \cdot \cos \mu_k x_2, \quad (19c)$$

где $f_{ik}(t)$, $\Phi_{ik}^{(1)}(t)$, $\Phi_{ik}^{(2)}(t)$ – подлежащие определению функции времени t .

Рассматривая (19a) – (19c), легко заметить, что граничные условия (18a), (18c) и последние условия из (18b), (18d) ($\varphi = 0$, $\psi = 0$) удовлетворяются.

Подставляя (19a) в (10a), получим линейное уравнение относительно $F(x_1, x_2, t)$. Решение этого уравнения, удовлетворяющее первым двум условиям из (18b) и (18d), находим обычным образом. Затем, подставляя значения w , Φ_1 и Φ_2 из (19a) – (19c) в (10c) и (10d), получим линейную алгебраическую систему относительно $\Phi_{ik}^{(1)}(t)$ и $\Phi_{ik}^{(2)}(t)$. Решая эту систему, найдём Φ_1 и Φ_2 , выраженные через функции $f_{ik}(t)$. Для определения $f_{ik}(t)$ воспользуемся уравнением (10b). Подставляя (19a) – (19c) и найденное выражение для F в (10b) и решая его методом Бубнова-Галеркина, для $f_{ik}(t)$ получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 f_{ik}}{dt^2} + (\varepsilon + \varepsilon_a) \frac{df_{ik}}{dt} + \omega_{ik}^2 f_{ik} + \psi_{ik}(f_{11}, \dots, f_{mn}, M) = 0 \quad (20)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m)$$

где ω_{ik} – частоты собственных колебаний пластинки, Ψ_{ik} – некоторые нелинейные функции.

В дальнейшем, ограничимся случаем двухчленной аппроксимации ($i = 1, 2, k = 1$). Тогда, система (20) в безразмерных функциях $x_1 = f_{11}h^{-1}$, $x_2 = f_{21}h^{-1}$ принимает вид [5,6]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}kvx_2 + kv^2 \left[\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2 + \right. \\ \left. + vx_2 (\beta_{11}x_1^2 + \beta_{12}x_2^2) \right] + Qx_1 (\gamma_{11}x_1^2 + \gamma_{12}x_2^2) = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3}kvx_1 + kv^2 \left[\alpha_{21}x_1x_2 + \right. \\ \left. + vx_1 (\beta_{21}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2) \right] + Qx_2 (\gamma_{21}x_1^2 + \gamma_{22}x_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$, введены обозначения:

$$k = \frac{4\mathfrak{A}p_\infty}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{4}{16\rho_0 \omega_1^2}, \quad v = M \frac{h}{a}, \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1}(\varepsilon + \varepsilon_a), \quad (22a)$$

а также коэффициенты α_{ik} и β_{ik}

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \frac{2}{9}(\mathfrak{A} + 1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(\mathfrak{A} + 1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(\mathfrak{A} + 1), \\ \beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40}(\mathfrak{A} + 1), \quad \beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70}(\mathfrak{A} + 1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70}(\mathfrak{A} + 1), \end{aligned} \quad (22b)$$

учитывающие аэродинамическую нелинейность и коэффициенты γ_{ik}

$$\gamma_{11} = \frac{\lambda_1^4}{a_{22}} + \frac{\mu_1^4}{a_{11}}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 4\gamma_{11} + \frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{12}} + \frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{22}}, \quad \gamma_{22} = \frac{\lambda_2^4}{a_{22}} + \frac{\mu_1^4}{a_{11}}, \quad (22c)$$

учитывающие геометрическую нелинейность, где

$$\Delta_{ik} = a_{11}\lambda_i^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_i^2\mu_k^2 + a_{22}\mu_k^4. \quad (22d)$$

В (22a) v – приведённый параметр скорости, χ – приведённый параметр демпфирования, ω_1 и ω_2 – частоты малых собственных колебаний пластинки, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \frac{1}{\rho_0 h} \left[2I_0 \left(\frac{h}{2} \right) (B_{55}\lambda_1 P_{11} + B_{44}\mu_1 Q_{11}) \right], \\ \omega_2^2 = \frac{1}{\rho_0 h} \left[2I_0 \left(\frac{h}{2} \right) (B_{55}\lambda_2 P_{21} + B_{44}\mu_1 Q_{21}) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
P_{ik} &= \frac{\lambda_i}{R_{ik}} \left\{ \left[D_{11} \lambda_i^2 + (D_{12} + 2D_{66}) \mu_k^2 \right] \left[2B_{44} I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{22} \mu_k^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{66} \lambda_i^2) \right] - I_1 (B_{12} + B_{66}) \left[D_{22} \mu_k^2 + (D_{12} + 2D_{66}) \lambda_i^2 \right] \mu_k^2 \right\}, \\
Q_{ik} &= \frac{\mu_k}{R_{ik}} \left\{ \left[D_{22} \mu_k^2 + (D_{12} + 2D_{66}) \lambda_i^2 \right] \left[2B_{55} I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{11} \lambda_i^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B_{66} \mu_k^2) \right] - I_1 (B_{12} + B_{66}) \left[D_{11} \lambda_i^2 + (D_{12} + 2D_{66}) \mu_k^2 \right] \lambda_i^2 \right\}, \\
R_{ik} &= \left[2B_{55} I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{11} \lambda_i^2 + B_{66} \mu_k^2) \right] \left[2B_{44} I_0 \left(\frac{h}{2} \right) + I_1 (B_{22} \mu_k^2 + B_{66} \lambda_i^2) \right] - \\
&\quad - I_1^2 (B_{12} + B_{66})^2 \lambda_i^2 \mu_k^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (21) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра v). Отметим, что система (21) внешне не отличается от соответствующей системы уравнений классической теории [5], однако, многие коэффициенты этой системы могут существенно отличаться от соответствующих коэффициентов классической теории.

4. Решение линейной задачи

Решению нелинейной задачи, как правило, будет предшествовать анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти критическое значение параметра $v = v_{cr}$ (следовательно, и критическое значение скорости обтекающего потока $u_{cr} = ah^{-1}v_{cr}a_\infty$ или $M_{cr} = ah^{-1}v_{cr}$), при котором невозмущенное состояние пластинки становится неустойчивым относительно малых возмущений, и б) указанное критическое значение u_{cr} (или M_{cr} или v_{cr}) будет необходимо и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке.

Итак, соответствующая (8) линейная система имеет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3} k v x_2 = 0, \quad \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3} k v x_1 = 0. \quad (24)$$

Представляя решение системы (24) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda \tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda \tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^4 + 2\chi\lambda^3 + (\gamma^2 + 1 + \chi^2)\lambda^2 + \chi(\gamma^2 + 1)\lambda + \gamma^2 + \frac{4}{9}k^2v^2 = 0.$$

Невозмущенная форма пластинки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица [9], записываются в виде:

$$\chi > 0, \quad \chi(1 + \gamma^2) > 0, \\ (\gamma^2 - 1)^2 + 2\chi^2(1 + \gamma^2) - \frac{16}{9}k^2v^2 > 0.$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Из третьего неравенства следует, что в случае малых значений v , все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w \equiv 0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра $v = v_{cr}$, при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому, из третьего неравенства получается следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки [5]:

$$v_{cr} = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{k} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}. \quad (25)$$

Принимая $v = v_{cr}$ из характеристического уравнения, найдём следующее значение θ_{cr} частоты колебания пластинки при линейном флаттере ($\lambda_{cr} = \pm i\theta_{cr}$)

$$\theta_{cr}^2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 1). \quad (26)$$

Формулы, аналогичные (25) и (26), получены многими авторами (см. Литературу приведенную в [5,10]) и являются первыми приближениями для v_{cr} и θ_{cr} , определяемые на основе точного решения.

Известно, что учёт явлений, связанных с поперечным сдвигом, снижает величины частот свободных колебаний [3]. В силу этого, из (25) легко заметить, что учёт явлений, связанных с поперечным сдвигом, уменьшает критическое значение скорости, при этом возможен панельный флаттер [3] (см. также Таблицу 1).

5. Исследование нелинейной задачи

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (8). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин нагруженных консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую к задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближённое периодическое решение системы (8) будем искать в виде [4]

$$x_1 = A_1 \cos \theta \tau + B_1 \sin \theta \tau + C_1 + \dots, \quad x_2 = A_2 \cos \theta \tau + B_2 \sin \theta \tau + C_2 + \dots \quad (27)$$

Здесь A_i , B_i , C_i и $\theta = \omega \omega_1^{-1}$ ($i = 1, 2$) – неизвестные постоянные; ω – неизвестная частота нелинейных колебаний; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (27) отличается от существующих [5] наличием свободных членов $C_i \neq 0$, присутствие которых характерна задачам с квадратичной нелинейностью [4,7].

Подставим решение (27) в систему (8) и приравняем к нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos \theta \tau$ и $\sin \theta \tau$ (члены, содержащие гармоники, пренебрегаются). Получающаяся при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается, что [4]: а) затухание системы достаточно мало ($\chi |B_i| \ll |A_i|$, $|B_i| \ll |A_i|$; ($i = 1, 2$)), и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившиеся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния, бесконечно мало отличающегося от невозмущённого ($|A_j| \gg |C_j|$; $j = 1, 2$). Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведения величин B_1 , B_2 , C_1 и C_2 , указанная нелинейная система представится следующими подсистемами: уравнения, полученные приравнованием к нулю свободных членов:

$$\begin{aligned} C_1 - \frac{2}{3} k v C_2 + \frac{1}{2} k v^2 (\alpha_{11} A_1^2 + \alpha_{12} A_2^2) + k v^3 A_2 (\beta_{11} A_1 C_1 + \beta_{12} A_2 C_2) + \\ + \frac{1}{2} k v^3 C_2 (\beta_{11} A_1^2 + \beta_{12} A_2^2) + Q A_1 (\gamma_{11} A_1 C_1 + \gamma_{12} A_2 C_2) + \\ + \frac{1}{2} Q C_1 (\gamma_{11} A_1^2 + \gamma_{12} A_2^2) = 0, \\ \gamma^2 C_2 + \frac{2}{3} k v C_1 + \frac{1}{2} k v^2 \alpha_{21} A_1 A_2 + k v^3 A_1 (\beta_{21} A_1 C_1 + \beta_{22} A_2 C_2) + \\ + \frac{1}{2} k v^3 C_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + Q A_2 (\gamma_{21} A_1 C_1 + \gamma_{22} A_2 C_2) + \\ + \frac{1}{2} Q C_2 (\gamma_{21} A_1^2 + \gamma_{22} A_2^2) = 0; \end{aligned}$$

уравнения, полученные приравнованием к нулю коэффициентов при $\cos \theta \tau$:

$$\begin{aligned} (1 - \theta^2) A_1 + \chi \theta B_1 - \frac{2}{3} k v A_2 + 2 k v^2 (\alpha_{11} A_1 C_1 + \alpha_{12} A_2 C_2) + \\ + \frac{3}{4} k v^3 A_2 (\beta_{11} A_1^2 + \beta_{12} A_2^2) + \frac{3}{4} Q A_1 (\gamma_{11} A_1^2 + \gamma_{12} A_2^2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^2 - \theta^2) A_2 + \chi \theta B_2 + \frac{2}{3} k v A_1 + \alpha_{21} k v^2 (A_1 C_2 + A_2 C_1) + \\
& + \frac{3}{4} k v^3 A_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + \frac{3}{4} Q A_2 (\gamma_{21} A_1^2 + \gamma_{22} A_2^2) = 0;
\end{aligned}$$

уравнения, полученные приравняв к нулю коэффициенты при $\sin \theta \tau$:

$$\begin{aligned}
& (1 - \theta^2) B_1 - \frac{2}{3} k v B_2 - \chi \theta A_1 + \frac{1}{2} k v^3 \beta_{11} A_1 A_2 B_1 + \\
& + \frac{1}{4} k v^3 (\beta_{11} A_1^2 + 3 \beta_{12} A_2^2) B_2 + \frac{1}{4} Q (3 \gamma_{11} A_1^2 + \gamma_{12} A_2^2) B_1 + \\
& + \frac{1}{2} Q \gamma_{12} A_1 A_2 B_2 = 0, \\
& (\gamma^2 - \theta^2) B_2 - \chi \theta A_2 + \frac{2}{3} k v B_1 + \frac{1}{4} k v^3 (3 \beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) B_1 + \\
& + \frac{1}{2} k v^3 \beta_{22} A_1 A_2 B_2 + \frac{1}{2} Q \gamma_{21} A_1 A_2 B_1 + \\
& + \frac{1}{4} Q (\gamma_{21} A_1^2 + 3 \gamma_{22} A_2^2) B_2 = 0.
\end{aligned}$$

Третья подсистема учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания, указанная подсистема имеет следующее приближённое решение:

$$B_1 \approx 0, \quad B_2 \approx 0 \quad \text{при } \chi \approx 0$$

Пользуясь первой подсистемой, выразим C_1 и C_2 через A_1 и A_2 (см. (29)). Тогда, вторая подсистема, определяющая характеристики A_1 и A_2 амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы в зависимости от параметров θ и v , при $\chi \approx 0$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
& A_1 (1 - \theta^2) - \frac{2}{3} k v A_2 + 2 k v^2 \alpha_{11} A_1 C_1 + 2 k v^2 \alpha_{12} A_2 C_2 + \\
& + \frac{3}{4} k v^3 A_2 (\beta_{11} A_1^2 + \beta_{12} A_2^2) + \frac{3}{4} Q A_1 (\gamma_{11} A_1^2 + \gamma_{12} A_2^2) = 0, \\
& A_2 (\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3} k v A_1 + k v^2 \alpha_{21} (A_1 C_2 + A_2 C_1) + \\
& + \frac{3}{4} k v^3 A_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + \frac{3}{4} Q A_2 (\gamma_{21} A_1^2 + \gamma_{22} A_2^2) = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{kv^2}{2\Delta} \left[(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_2 - \alpha_{21}A_1A_2\Delta_4 \right] \\
C_2 &= -\frac{kv^2}{2\Delta} \left[\alpha_{21}A_1A_2\Delta_1 - (\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_3 \right],
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + kv^3\beta_{11}A_1A_2 \\
\Delta_2 &= \gamma^2 + kv^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2 \\
\Delta_3 &= \frac{2}{3}kv + \frac{3}{2}kv^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}kv^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2 \\
\Delta_4 &= -\frac{2}{3}kv + \frac{3}{2}kv^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}kv^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2 \\
\Delta &= \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4.
\end{aligned}$$

Отметим [5], что в частном случае, когда v находится в достаточно малой окрестности v_{cr} , то $A_1 \approx -A_2$. Действительно, из третьей подсистемы после линеаризации (учитывая достаточную малость затухания) получается:

$$\begin{aligned}
(1 - \theta^2)B_1 - \frac{2}{3}kvB_2 - \chi\theta A_1 &= 0, \\
(\gamma^2 - \theta^2)B_2 + \frac{2}{3}kvB_1 - \chi\theta A_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Имея в виду, что на границе области флаттера $v = v_{cr}$ и $\theta = \theta_{cr}$, из (25), (26) и (30) находим:

$$\chi\theta_{cr}A_1 = \frac{1 - \gamma^2}{2}(B_1 + B_2), \quad -\chi\theta_{cr}A_2 = \frac{1 - \gamma^2}{2}(B_1 + B_2);$$

Следовательно, $A_1 \approx -A_2$, если v достаточно близко к v_{cr} и θ к θ_{cr} . Отметим, что исследования, проведённые в [5], базируются также на приближённое равенство $A_1 \approx -A_2$.

Численные исследования, приведённые в [12], показывают, что отношение h/a имеет существенное влияние (как качественное, так и количественное) на характер зависимости амплитуда-скорость.

4.1. Влияние поперечных сдвигов на амплитуду флаттерных колебаний при достаточно толстых пластинах

Исследуем нелинейную систему (28), решая её численно при следующих исходных данных: $\alpha = 1.4$; $\rho_\infty = 1.29 \text{ кг} / \text{м}^3$; $a_\infty = 340.29 \text{ м} / \text{с}$ (воздух);

$B_{11} = 460,2 \cdot 10^9 \text{ H / M}^2$; $B_{12} = 174,7 \cdot 10^9 \text{ H / M}^2$; $B_{44} = 126,9 \cdot 10^9 \text{ H / M}^2$
 (трансверсально-изотропный материал Al_2O_3), для которого $B_{22} = B_{11}$; $B_{55} = B_{44}$;
 $B_{66} = \frac{B_{11} - B_{12}}{2}$; $E = \frac{B_{11}^2 - B_{12}^2}{B_{11}}$; $\mu = \frac{EB_{12}}{B_{11}^2 - B_{12}^2}$; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$. Исследована
 зависимость амплитуды (в точке $(a/2, b/2, 0)$ пластинки) установившихся
 флаттерных колебаний A (в рассматриваемом случае $A = A_1$) от параметра v ,
 характеризующий скорость набегающего потока, при различных значениях h/a ,
 $b = 3a$ и $\theta = \theta_*$.

Таблица 2.

h/a=1/30									
$I_1 \backslash \frac{v}{v_*}$	0	0.02	0.03	0.05	0.1	0.5	0.8	1	2
$I_1 = 0$	0.9348	0.9048	0.2269	0.0863	0.0283 0.2942	0.0019 0.0252	0.0007 0.0124	0 0.0088	0.0032
$I_1 \neq 0$	0.9039	0.8979	0.2587	0.0933 1.3962	0.0304 0.3209	0.0021 0.0273	0.0076	0	0.0034
h/a=1/15									
$I_1 \backslash \frac{v}{v_*}$	0	0.02	0.03	0.05	0.1	0.5	0.8	1	2
$I_1 = 0$	0.9348	0.02096 0.20231	0.01130 0.10881	0.00517 0.05035	0.00176 0.01776	0.00012 0.00157	0.00004 0.00077	0 0.00055	0.00020
$I_1 \neq 0$	0.0825	0.0270 0.2761	0.0145 0.1465	0.0066 0.0675	0.0023 0.0237	0.00015 0.00211	0.00005 0.00104	0 0.00074	0.00026

Табл. 2 показывает, что влияние поперечных сдвигов на зависимость амплитуда-скорость имеет количественный характер. Учёт сдвигов, как и ожидалось, приводит к увеличению амплитуды колебаний, при этом, с увеличением толщины пластинки влияние поперечных сдвигов увеличивается. В частности, если $a=30h$, то учёт сдвигов увеличивает значение амплитуды на 15%, а когда $a=15h$, то указанное влияние составляет приблизительно 28-30%. Приведённая табл. 2 показывает также, что зависимость $A(v)$ в некотором интервале изменения скорости обтекающего потока является двузначной функцией.

Вычисления показывают также, что для больших значений θ в случае толстых пластин имеет место зависимость, приведённая на фиг.1. которая показывает, что существует значение v^* такое, что при $0 < v \leq v^*$ функция $A(v)$ – двузначная, а вне этого интервала невозможно возбудить нелинейные флаттерные колебания (фиг.1).

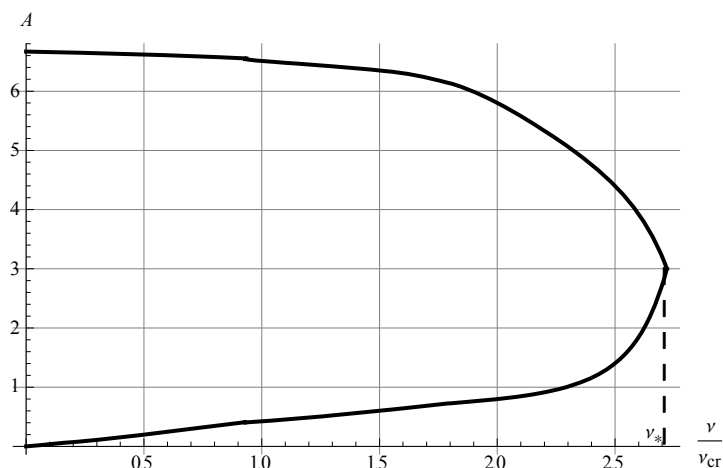


Рис.1. График функции $A(v)$ при $h/a=1/300$, $b/a=3$, $\theta=4$

Основные результаты

- Геометрические параметры имеют существенное влияние (как качественное, так и количественное) на характер зависимости амплитуда-скорость;
- Влияние поперечных сдвигов на зависимость амплитуда-скорость имеет количественный характер;
- Существуют значения обтекающего потока такое, что при которых существует интервал где зависимость амплитуда-скорость является двузначной функцией, а вне этого интервала невозможно возбудить нелинейные флаттерные колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №4. С.91-96.
4. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и Машиностроение. 1961. №1; С. 92-98.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
7. Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. //Изв. АН Арм.ССР. 1960. Т.13. №1. С.46-58.
8. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6.
9. Меркин Д.П. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312с.
10. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С.67-122.
11. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronaut. Sci. 23, №6, 1956.
12. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. //Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.

Сведения об авторах:

Амбарцумян С.А. – Академик НАН Армении; Тел.: (010)52 06 44
E-mail: Samb@sci.am

Багдасарян Г.Е. – академик НАН Армении, профессор, ведущий научный работник
Института механики НАН Армении
Тел.: (060) 71 00 89; E-mail: gevorgb@rau.am

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СЕЙСМОЛОГИИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Агаловян Л.А., Тагворян В.В.

Ключевые слова: Слоистый пакет, литосферная плита, неклассическая задача, асимптотическое решение.

Keywords: Layered pack, lithospheric plate, a non-classic problem, asymptotic solution.

Aghalovyan L.A., Tagvoryan V.V.

On one problem of seismology for layered plates

Abstract. A class of spatial problems of elasticity theory for a layered pack from orthotropic plates, simulating the behaviour of the lithospheric plates and blocks of the Earth crust is considered. The measuring devices of inclinometers type are placed between the layers with numbers $(k-1)$ and (k) . The asymptotic solutions of the spatial problem of elasticity theory according to the date of the measuring devices, which permit us to follow the process of accumulation in time of the critical deformations, causing an earthquake are found.

Аннотация. Рассмотрен класс пространственных задач теории упругости для слоистого пакета из ортотропных пластин, моделирующего поведение литосферных плит и блоков земной коры. Измерительные приборы типа наклономеров помещены между слоями с номерами $(k-1)$ и (k) . Найдены асимптотические решения пространственной задачи теории упругости согласно данным измерительных приборов, которые позволяют проследить процесс накопления во времени критических деформаций, приводящих к землетрясению.

Введение. В двадцатом столетии была установлена основная причина возникновения сильных землетрясений. Возникновение обусловливается тектоникой литосферных плит Земли ($\approx 95\%$ землетрясений) [1-3]. Планета Земля является слоистой средой. Земная кора и часть верхней мантии до границы с астеносферой составляет литосферу. Литосфера сетью пересекающихся глубинных разломов разбита на ряд больших блоков, которые называются плитами. Крупными литосферными плитами Земли являются: Антарктическая, Евразийская, Африканская, Индо-Австралийская, Южно-Американская, Северо-Американская, Тихоокеанская, Наска, Филиппинская, Анатолийская, Арабская и др.

Большинство землетрясений сгруппировано в узких областях, сейсмическая и тектоническая активность в которых обусловлены взаимодействием примыкающих друг к другу литосферных плит («сейсмические зоны»). Процесс подготовки землетрясений охватывает два основных типа тектонических движений: медленные (вековые) и быстрые (скачкообразные). Вековые движения могут длиться десятки лет, поэтому являются квазистатическими, в результате, в литосферных плитах и в отдельных их участках накапливаются деформации, которые при достижении критического значения – порядка 10^{-4} , а по данным известного японского сейсмолога Rikitake [1] – порядка $4.7 \cdot 10^{-5}$, приводят к глобальному разрушению (землетрясению) и основная часть накопленной с годами огромной потенциальной энергии выделяется в виде объёмных упругих продольных (первичных – primary) Р и сдвиговых (поперечных, вторичных – secondary) S-волн, а также поверхностных волн Релея и Лява. Всегда скорость V_p продольных волн больше скорости V_s сдвиговых волн. Это позволяет определить расстояние эпицентра землетрясения от заданной сейсмостанции, а по данным трёх станций – место очага землетрясения. В середине двадцатого столетия были зафиксированы заметные деформации (перемещения точек) поверхности земли до землетрясения [1]. Тогда же возникла естественная задача – используя эти данные, определить напряжённо-деформированное состояние (НДС) литосферной плиты или соответствующего блока земной коры и провести

мониторинг его изменения во времени, по данным новых измерений, с целью обнаружения критических деформационных состояний и мест их проявления. Однако, возникающая задача теории упругости оказалась неклассической и долгое время не было найдено удовлетворительное решение. Асимптотический метод решения сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений [4] позволил решить эту проблему. В [5] найдено решение неклассической квазистатической трёхмерной задачи теории упругости для слоистого пакета из пластин, когда лицевая поверхность пакета свободна (соответствующие компоненты тензора напряжений там равны нулю) и известны значения компонент вектора перемещения, как данные измерений сейсмостанций, GPS систем, наклономеров и других измерительных систем.

Чтобы уменьшить влияние измерений внешних аномальных (в основном, атмосферных) факторов на данные истинно происходящих процессов внутри пакета (литосферной плиты), в сейсмологии начали измерительные приборы (наклонометры и др.) помещать внутри пакета на некотором расстоянии от лицевой поверхности и по данным этих приборов составлять более объективное представление о НДС пакета. В данной работе решена соответствующая квазистатическая задача теории упругости.

1. Основные уравнения и постановка краевой задачи. Рассмотрим слоистый пакет из N ортотропных пластин, занимающий область

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h, h = h_1 + h_2 + \dots + h_N,$$

$$\min(a, b) = l, h \ll l\}, \text{ где } h_n \ (1 \leq n \leq N) \text{ – толшины пластин (рис. 1).}$$

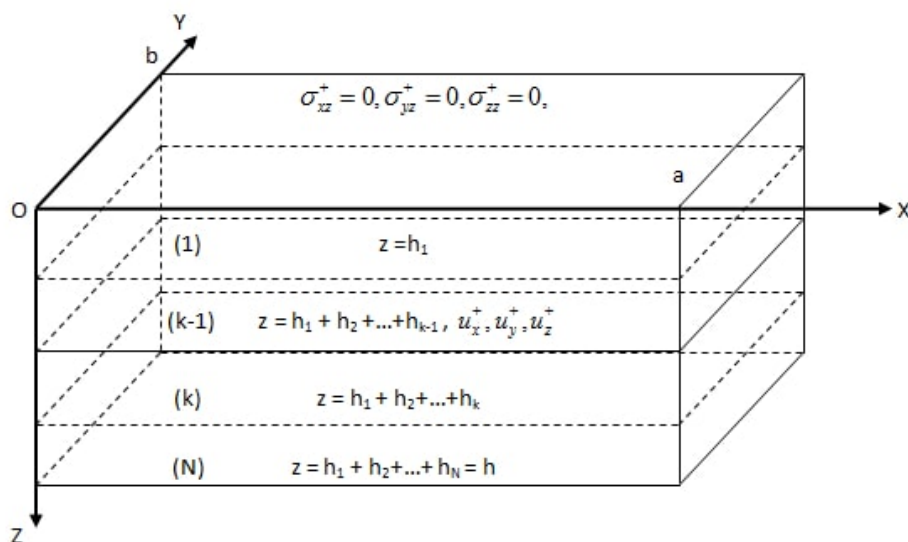


Рис 1. Слоистый пакет из ортотропных пластин

Требуется найти решение уравнений и соотношений упругости (состояния) пространственной задачи теории упругости для слоистого пакета из ортотропных пластин, когда лицевая поверхность $z = 0$ пакета свободна:

$$\sigma_{jz}^{(1)}(x, y, 0, t) = 0, \quad j = x, y, z, \quad (1.1)$$

заданы значения перемещений точек поверхности контакта $z = H_{k-1}$ между слоями с номерами $(k-1)$ и (k) , как данные наклономеров и других измерительных средств:

$$u_j^{(k-1)}(x, y, H_{k-1}, t) = u_j^{(k)}(x, y, H_{k-1}, t) = u_j^+(x, y, H_{k-1}, t), \quad j = x, y, z, \quad (1.2)$$

и при условиях полного контакта между всеми слоями:

$$\begin{aligned} \sigma_{jz}^{(n)}(x, y, H_n, t) &= \sigma_{jz}^{(n+1)}(x, y, H_n, t), \\ u_j^{(n)}(x, y, H_n, t) &= u_j^{(n+1)}(x, y, H_n, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n h_i, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

где σ_{jz} – компоненты тензора напряжений, u_x, u_y, u_z – компоненты вектора перемещения, время t входит как параметр (квазистатическая задача), фиксирующий момент проведения измерений.

2. Асимптотическое решение задачи. Чтобы решить сформулированную задачу, в уравнениях и соотношениях трёхмерной задачи теории упругости ортотропного тела перейдём к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h = \varepsilon^{-1} z/l, \quad u = u_x/l, \quad v = u_y/l, \quad w = u_z/l, \quad (2.1)$$

В результате получим сингулярно-возмущённую малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \zeta} + l F_x^{(k)} &= 0, \quad (x, y, \xi, \eta) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial \zeta} + l F_z^{(k)} &= 0, \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \xi} &= e_1^{(k)} + \alpha_{11}^{(k)} \theta^{(k)}, \quad \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \eta} = e_2^{(k)} + \alpha_{22}^{(k)} \theta^{(k)}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \zeta} = e_3^{(k)} + \alpha_{33}^{(k)} \theta^{(k)}, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \eta} &= a_{44}^{(k)} \sigma_{yz}^{(k)}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \xi} = a_{55}^{(k)} \sigma_{xz}^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(k)} \sigma_{xy}^{(k)},$$

$$e_m^{(k)} = a_{1m}^{(k)} \sigma_{xx}^{(k)} + a_{2m}^{(k)} \sigma_{yy}^{(k)} + a_{3m}^{(k)} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad m = 1, 2, 3,$$

где a_{ij} – постоянные упругости, α_{ij} – коэффициенты температурного расширения,

$\theta^{(k)} = T^{(k)}(x, y, z, t) - T_0^{(k)}(x, y, z, t)$ – разность температур, F_j – объёмная сила,

для случая учёта веса слоёв $F_x^{(k)} = F_y^{(k)} = 0$, $F_z^{(k)} = \rho_k g$, ρ_k – плотность, g – ускорение свободного падения. Решение системы (2.2) складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b). Решение внутренней задачи отыскивается в виде:

$$\sigma_{ij}^{(k)\text{int}} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(k,s)}, \quad (i, j = x, y, z), \quad u^{(k)\text{int}} = \varepsilon^s u^{(k,s)}, \quad (u, v, w), \quad s = \overline{0, S}, \quad (2.3)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Подставив (2.3) в (2.2) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε , получим новую систему, откуда однозначно определяются

$\sigma_{ij}^{(k,s)}, u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}$:

$$\sigma_{jz}^{(k,s)} = \sigma_{jz0}^{(k,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z$$

$$\sigma_{xx}^{(k,s)} = -\frac{A_{23}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\sigma_{yy}^{(k,s)} = -\frac{A_{13}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)} - \frac{\gamma_{22}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} + \sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(k)}} \left[\frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad (2.4)$$

$$u^{(k,s)} = a_{55}^{(k)} \zeta \sigma_{xz0}^{(k,s)} + u_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$v^{(k,s)} = a_{44}^{(k)} \zeta \sigma_{yz0}^{(k,s)} + v_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$w^{(k,s)} = \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \zeta \sigma_{zz0}^{(k,s)} + w_0^{(k,s)}(\xi, \eta) + \int_0^\zeta \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz*}^{(k,s)} &= -\int_0^\zeta \left[F_j^{(k,s)} + \frac{\partial \sigma_{jx}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \quad j = x, y, z, \\
\sigma_{xx*}^{(k,s)} &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{22}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - A_{23}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right], \\
\sigma_{yy*}^{(k,s)} &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \left[a_{11}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s-1)}}{\partial \eta} - a_{12}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right], \\
u_*^{(k,s)} &= \int_0^\zeta \left[a_{55}^{(k)} \sigma_{xz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta, \quad v_*^{(k,s)} = \int_0^\zeta \left[a_{44}^{(k)} \sigma_{yz*}^{(k,s)} - \frac{\partial w^{(k,s-1)}}{\partial \eta} \right] d\zeta, \\
w_*^{(k,s)} &= \int_0^\zeta \left[a_{13}^{(k)} \sigma_{xx*}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} \sigma_{yy*}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} \sigma_{zz*}^{(k,s)} \right] d\zeta,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
A_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - \left(a_{12}^{(k)} \right)^2, \quad A_{13}^{(k)} = a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}, \\
A_{23}^{(k)} &= a_{22}^{(k)} a_{13}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}, \quad A_{33}^{(k)} = a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} - a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)}, \\
\gamma_{11}^{(k)} &= \alpha_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)}, \quad \gamma_{22}^{(k)} = \alpha_{22}^{(k)} a_{11}^{(k)} - a_{12}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)}, \\
B_{11}^{(k)} &= \alpha_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} - a_{13}^{(k)} \gamma_{11}^{(k)} - a_{23}^{(k)} \gamma_{22}^{(k)}, \quad Q^{(k,m)} \equiv 0 \text{ при } m < 0.
\end{aligned}$$

Решение (2.4) содержит 6N неизвестных функций $\sigma_{jz0}^{(k,s)}$, $u_0^{(k,s)}$, $v_0^{(k,s)}$, $w_0^{(k,s)}$, которые однозначно определяются из условий (1.1) - (1.3). Для первого слоя имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz0}^{(1,s)} &= 0, \quad \sigma_{jz*}^{(1,s)} = \sigma_{jz*}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\
u^{(1,s)} &= u_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + u_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
v^{(1,s)} &= v_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + v_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
w^{(1,s)} &= w_0^{(1,s)}(\xi, \eta) + \int_0^\zeta \frac{B_{11}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \theta^{(1,s)} d\zeta + w_*^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

для величин слоёв до $(k-1)$ получаются:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz}^{(n,s)} &= \sigma_{jz0}^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - \sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + \\
&\quad + \sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\
u^{(n,s)} &= a_{55}^{(n)} \sigma_{xz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + a_{55}^{(n-1)} \zeta_{n-1} \sigma_{xz0}^{(n-1,s)} + u_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + \\
&\quad + u_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - u_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + u_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
v^{(n,s)} &= a_{44}^{(n)} \sigma_{yz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + a_{44}^{(n-1)} \zeta_{n-1} \sigma_{yz0}^{(n-1,s)} + v_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + \\
&\quad + v_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - v_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + v_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
w^{(n,s)} &= \frac{A_{33}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \sigma_{zz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + \frac{A_{33}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}} \zeta_{n-1} \sigma_{zz0}^{(n-1,s)} + \\
&\quad + \int_0^{\zeta_{n-1}} \left(\frac{B_{11}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}} \theta^{(n-1,s)} - \frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \theta^{(n,s)} \right) d\zeta + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \theta^{(n,s)} d\zeta + \\
&\quad + w_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - \\
&\quad - w_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + w_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad 2 \leq n \leq k-1,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

для слоя с номером (k), после удовлетворения условий (1.2), имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz}^{(k,s)} &= \sigma_{jz0}^{(k-1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(k-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \\
&\quad + \sigma_{jz*}^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\
u^{(k,s)} &= a_{55}^{(k)} \sigma_{xz0}^{(k,s)}(\zeta - \zeta_{k-1}) + u^{+(s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \\
&\quad + u_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
v^{(k,s)} &= a_{44}^{(k)} \sigma_{yz0}^{(k,s)}(\zeta - \zeta_{k-1}) + v^{+(s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) - v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \\
&\quad + v_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
w^{(k,s)} &= \frac{A_{33}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \sigma_{zz0}^{(k,s)}(\zeta - \zeta_{k-1}) + w^{+(s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) -
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\zeta_{k-1}} \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta - w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta_{k-1}) + \\
& + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(k)}}{A_{11}^{(k)}} \theta^{(k,s)} d\zeta + w_*^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
u^{+(0)} &= \frac{u_x^+}{l}, \quad u^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w; x, y, z)
\end{aligned}$$

для всех остальных слоёв, начиная с $(k+1)$, согласно условиям (1.3), получаются:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jz}^{(n,s)} &= \sigma_{jz0}^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + \sigma_{jz*}^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - \sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + \\
& + \sigma_{jz*}^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = x, y, z, \\
u^{(n,s)} &= a_{55}^{(n)} \sigma_{xz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + a_{55}^{(n-1)} \zeta_{n-1} \sigma_{xz0}^{(n-1,s)} + u_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + \\
& + u_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - u_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + u_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\
v^{(n,s)} &= a_{44}^{(n)} \sigma_{yz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + a_{44}^{(n-1)} \zeta_{n-1} \sigma_{yz0}^{(n-1,s)} + v_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + \\
& + v_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - v_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + v_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.9) \\
w^{(n,s)} &= \frac{A_{33}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \sigma_{zz0}^{(n,s)}(\zeta - \zeta_{n-1}) + \frac{A_{33}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}} \zeta_{n-1} \sigma_{zz0}^{(n-1,s)} + \\
& + \int_0^{\zeta_{n-1}} \left(\frac{B_{11}^{(n-1)}}{A_{11}^{(n-1)}} \theta^{(n-1,s)} - \frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \theta^{(n,s)} \right) d\zeta + \int_0^{\zeta} \frac{B_{11}^{(n)}}{A_{11}^{(n)}} \theta^{(n,s)} d\zeta + \\
& + w_0^{(n-1,s)}(\xi, \eta) + w_*^{(n-1,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) - \\
& - w_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta_{n-1}) + w_*^{(n,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad k+1 \leq n \leq N.
\end{aligned}$$

Отметим, что если входящие в условия (1.2) функции u_j^+ являются многочленами от тангенциальных координат, итерационный процесс обрывается на определённом приближении и получаем математически точное решение во внутренней задаче. Это весьма выгодно, поскольку по измерительным данным для перемещений, поверхность контакта можно аппроксимировать полиномом Лагранжа и получить математически точное решение. Повторив измерения в различные

периоды времени t и проведя анализ соответствующего решения, становится возможным выявления мест и периода времени, когда возможны возникновения критических состояний и процесс может стать динамическим и быстротечным, приводящим к возникновению землетрясения. Динамические быстротечные процессы можно исследовать, как в работе [6]. Отметим также, что решение пограничного слоя имеет экспоненциально убывающий характер по мере удаления от боковой поверхности во внутрь пакета и устраняет возможную неувязку на боковой поверхности. Оно строится описанным в [4] способом и, как правило, в вопросах сейсмологии пренебрегается.

3. О математически точных решениях. В качестве иллюстрации приведём математически точное решение для четырёхслойного пакета, когда на поверхности контакта между вторым и третьим слоями заданы значения перемещений точек, как данные измерений наклономеров и других измерительных средств (рис. 2):

$$u^+ = l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}), (u, v, w), \quad (3.1)$$

$$\theta^{(k)} = 0, F_x^{(k)} = F_y^{(k)} = 0, F_z^{(k)} = \rho_k g, \quad F_z^{(k,0)} = \varepsilon^2 l \rho_k g = \text{const}, F_z^{(k,s)} = 0 \text{ при } s \neq 0.$$

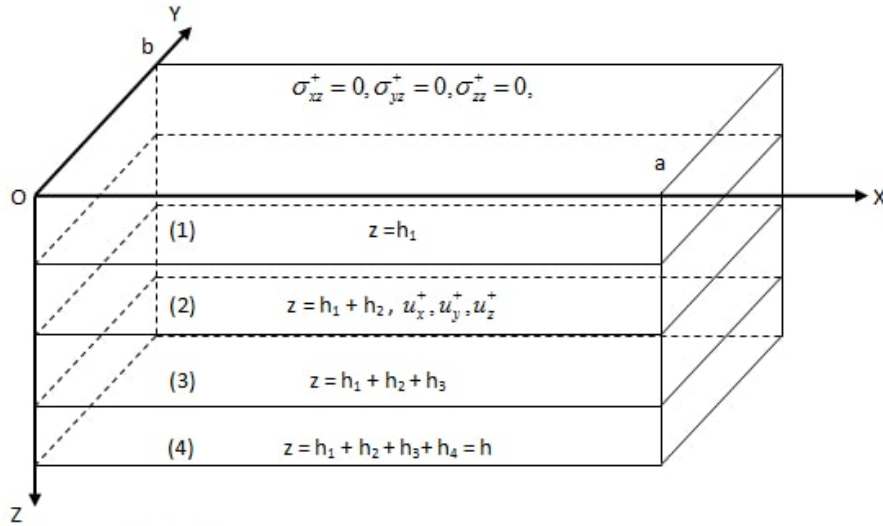


Рис 2. Четырёхслойный пакет из ортотропных пластин

Граничными условиями задачи будут:

$$\sigma_{jz}(x, y, 0, t) = 0, \quad j = x, y, z \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(1)} = \sigma_{jz}^{(2)} \\ u_j^{(1)} = u_j^{(2)} \end{cases} \quad j = x, y, z \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_1 = \frac{h_1}{h}, \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = \sigma_{jz}^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_2) \\ u_j^{(2)}(\xi, \eta, \zeta_2) = u_j^{(3)}(\xi, \eta, \zeta_2) = u_j^+(\xi, \eta, \zeta_2) \end{cases} \quad j = x, y, z \quad (3.4)$$

при $\zeta = \zeta_2 = \frac{h_1 + h_2}{h},$

$$\begin{cases} \sigma_{jz}^{(3)} = \sigma_{jz}^{(4)} \\ u_j^{(3)} = u_j^{(4)} \end{cases} \quad j = x, y, z \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_3 = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{h}. \quad (3.5)$$

Согласно формулам (2.6) - (2.9) будем иметь:

величины первого слоя ($0 \leq \zeta \leq \zeta_1$):

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = -h\rho_1 g\zeta, \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= \frac{A_{23}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} h\rho_1 g\zeta + \frac{1}{A_{11}^{(1)}} [a_{22}^{(1)} b_{2u} - a_{12}^{(1)} b_{3v}], \\ \sigma_{yy}^{(1)} &= \frac{A_{13}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} h\rho_1 g\zeta + \frac{1}{A_{11}^{(1)}} [a_{11}^{(1)} b_{3v} - a_{12}^{(1)} b_{2u}], \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \frac{1}{a_{66}^{(1)}} [b_{2v} + b_{3u}], \\ u_x^{(1)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_y^{(1)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\ u_z^{(1)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) + \frac{A_{33}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h^2 g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1) (\zeta_1 - \zeta_2) - \\ &\quad - l w_*^{(2,0)}(\xi, \eta, \zeta_2) + l w_*^{(2,0)}(\xi, \eta, \zeta_1) - l w_*^{(1,0)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \\ &\quad + l w_*^{(1,0)}(\xi, \eta, \zeta) - h w_*^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta_2) + h w_*^{(2,1)}(\xi, \eta, \zeta_1) - \\ &\quad - h w_*^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta_1) + h w_*^{(1,1)}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (3.6)$$

величины второго слоя ($\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$):

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} &= 0, \quad \sigma_{yz}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta), \\ \sigma_{xx}^{(2)} &= -\frac{A_{23}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta) + \frac{1}{A_{11}^{(2)}} [a_{22}^{(2)} b_{2u} - a_{12}^{(2)} b_{3v}], \\ \sigma_{yy}^{(2)} &= -\frac{A_{13}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta) + \frac{1}{A_{11}^{(2)}} [a_{11}^{(2)} b_{3v} - a_{12}^{(2)} b_{2u}], \\ \sigma_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{a_{66}^{(2)}} [b_{2v} + b_{3u}], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(2)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_y^{(2)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_z^{(2)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) + \frac{A_{33}^{(2)}}{A_{11}^{(2)}} h^2 g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1) (\zeta - \zeta_2) - \\
&\quad - l w_*^{(2,0)} (\xi, \eta, \zeta_2) + l w_*^{(2,0)} (\xi, \eta, \zeta) - \\
&\quad - h w_*^{(2,1)} (\xi, \eta, \zeta_2) + h w_*^{(2,1)} (\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned}$$

величины третьего слоя $(\zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_3)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(3)} &= 0, \sigma_{yz}^{(3)} = 0, \sigma_{zz}^{(3)} = h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \rho_3 \zeta), \\
\sigma_{xx}^{(3)} &= -\frac{A_{23}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \rho_3 \zeta) + \frac{1}{A_{11}^{(3)}} [a_{22}^{(3)} b_{2u} - a_{12}^{(3)} b_{3v}], \\
\sigma_{yy}^{(3)} &= -\frac{A_{13}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \rho_3 \zeta) + \frac{1}{A_{11}^{(3)}} [a_{11}^{(3)} b_{3v} - a_{12}^{(3)} b_{2u}], \\
\sigma_{xy}^{(3)} &= \frac{1}{a_{66}^{(3)}} [b_{2v} + b_{3u}], \\
u_x^{(3)} &= l(b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_y^{(3)} &= l(b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_z^{(3)} &= l(b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) + \frac{A_{33}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h^2 g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2) (\zeta - \zeta_2) - \\
&\quad - l w_*^{(3,0)} (\xi, \eta, \zeta_2) + l w_*^{(3,0)} (\xi, \eta, \zeta) - h w_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_2) + h w_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

величины четвёртого слоя $(\zeta_3 \leq \zeta \leq 1)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(4)} &= 0, \sigma_{yz}^{(4)} = 0, \sigma_{zz}^{(4)} = h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \rho_3 \zeta_3 + \rho_4 \zeta_3 - \rho_4 \zeta), \\
\sigma_{xx}^{(4)} &= -\frac{A_{23}^{(4)}}{A_{11}^{(4)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \rho_3 \zeta_3 + \rho_4 \zeta_3 - \rho_4 \zeta) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A_{11}^{(4)}} \left[a_{22}^{(4)} b_{2u} - a_{12}^{(4)} b_{3v} \right], \\
\sigma_{yy}^{(4)} &= - \frac{A_{33}^{(4)}}{A_{11}^{(4)}} h g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \rho_3 \zeta_3 + \rho_4 \zeta_3 - \rho_4 \zeta) + \\
& + \frac{1}{A_{11}^{(4)}} \left[a_{11}^{(4)} b_{3v} - a_{12}^{(4)} b_{2u} \right], \quad \sigma_{xy}^{(4)} = \frac{1}{a_{66}^{(4)}} [b_{2v} + b_{3u}], \\
u_x^{(4)} &= l (b_{1u} + \xi b_{2u} + \eta b_{3u}) + h b_{2w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_y^{(4)} &= l (b_{1v} + \xi b_{2v} + \eta b_{3v}) + h b_{3w} (\zeta_2 - \zeta), \\
u_z^{(4)} &= l (b_{1w} + \xi b_{2w} + \eta b_{3w}) + \frac{A_{33}^{(4)}}{A_{11}^{(4)}} h^2 g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2 - \\
& - \rho_3 \zeta_3 + \rho_4 \zeta_3) (\zeta - \zeta_3) + \frac{A_{33}^{(3)}}{A_{11}^{(3)}} h^2 g (\rho_2 \zeta_1 - \rho_1 \zeta_1 - \\
& - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 \zeta_2) (\zeta_3 - \zeta_2) - l w_*^{(3,0)} (\xi, \eta, \zeta_2) + l w_*^{(3,0)} (\xi, \eta, \zeta_3) - \\
& - l w_*^{(4,0)} (\xi, \eta, \zeta_3) + l w_*^{(4,0)} (\xi, \eta, \zeta) - h w_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_2) + \\
& + h w_*^{(3,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) - h w_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta_3) + h w_*^{(4,1)} (\xi, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$w_*^{(k,0)} (\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2A_{11}^{(k)}} \varepsilon^2 \zeta^2 l \rho_k g \left(a_{13}^{(k)} A_{23}^{(k)} + a_{23}^{(k)} A_{13}^{(k)} - a_{33}^{(k)} A_{11}^{(k)} \right), \tag{3.10}$$

$$k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\begin{aligned}
w_*^{(k,1)} (\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{A_{11}^{(k)}} \zeta \left[b_{2u} \left(a_{13}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{23}^{(k)} \right) + \right. \\
& \left. + b_{3v} \left(a_{11}^{(k)} a_{23}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Заклучение. Найдено решение трёхмерной квазистатической задачи теории упругости для слоистого пакета, моделирующего поведение литосферных плит и блоков земной коры. В задаче предполагается, что сейсмологические измерительные данные, позволяющие определить напряжённо-деформированные состояния слоёв пакета, сняты с наклономеров и других измерительных средств, помещённых между слоями с номерами (k-1) и (k).

Получено асимптотическое решение, указаны случаи, когда получаются математически точные решения, приведён иллюстрационный пример для пакета из четырёх ортотропных пластин.

Мониторинг найденного решения во времени позволяет проследить процесс подготовки землетрясений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА «15Т-2С343»

ЛИТЕРАТУРА

1. Rikitake T. Earthquake prediction. – Amsterdam: Elsevier, 1976. – 357 p.
2. Касахара К. Механика землетрясений. – М.: Мир, 1985. – 264 с. // Kasahara K. Earthquake Mechanics. – М.: Мир, 1985. – 264 p. (In Russian).
3. Ле Пишон К., Франшето Ж., Бонин Ж. Тектоника плит. – М.: Мир, 1977. – 288 с. // Pichon H. Le, Francheteau J., Bonnin J. Plate tectonics. – М.: Мир, 1977. – 288 p. (In Russian).
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. – Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
5. Aghalovyan L.A. On some classes of 3D boundary-value problems of statics and dynamics of plates and shells // Shell and membrane theories in mechanics and biology. – Switzerland: Springer International Publishing, 2015. – P. 1-23.
6. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. О динамическом поведении литосферных плит Земли на основе данных сейсмостанций и GPS-систем. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды Международной конференции. Т.1. – Ереван, 2012. – С. 42-46. // Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., On dynamic conduct of Lithospheric Plates of the Earth on the base of the data of seismic stations and GPS systems. Proceedings of International Conference “Topical problems of continuum mechanics”. V. 1. – Yerevan, 2012. – P. 42-46. (In Russian).

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН Армении, доктор физ-мат. наук, заведующий отд. «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА.

Тел.: (37410) 525835;

E-mail: lagal@sci.am

Тагворян Варужан Варданович – аспирант Института механики НАН РА.

Тел.: (37493) 805540;

E-mail: varuzh1993@gmail.com

ТЕРМОМЕХАНИКА БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Аветисян А.С., Мусий Р.С., Мельник Н.Б., Ивасько Р.А.

Ключевые слова: термомеханика, биметаллические тела, импульсное электромагнитное поле, несущая способность, свойства контактного соединения.

Key words: thermomechanics, bimetallic bodies, pulsed electromagnetic field, bearing capacity, properties of the contact connection.

Avetisyan A.S., Musii R.S., Melnyk N.B., Ivas'ko R.O.

Thermomechanics of bimetallic bodies at impulse electromagnetic fields

Abstract. The initial ratios of thermomechanics of bimetallic bodies in displacements and stresses under the action of pulsed electromagnetic fields are recorded. The initial and boundary conditions for the defining functions are formulated. As an example, the results of numerical studies of the bearing capacity of a bimetallic plate under the action of an electromagnetic pulse are presented.

Аннотация: Записаны исходные соотношения термомеханики биметаллических тел в перемещениях и напряжениях при воздействии импульсных электромагнитных полей. Сформулированы начальные и краевые условия на определяющие функции. В качестве примера приведены результаты численных исследований несущей способности биметаллической пластины при воздействии электромагнитного импульса.

1. Введение. В качестве элементов конструкций современных устройств различного целевого назначения часто используют электропроводные тела канонической конфигурации. При эксплуатации этих устройств такие элементы подвергаются воздействию различных физико-механических полей, в частности, импульсных электромагнитных.

В литературе рассмотрены математические модели взаимодействия электромагнитных полей (ЭМП) с электропроводными и токонесущими элементами конструкций. Большой вклад в построение и развитие таких моделей внесли учёные-механики армянской школы. В частности, вопросы магнитоупругости электропроводных пластин и оболочек, а также их устойчивости, рассмотрены в работах Амбарцумяна С.А., Багдасаряна Г.Е., Белубекяна М.В. и их учеников [1, 2]. Построены математические модели термомеханики однородных электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся и импульсных ЭМП [3-10].

Учитывая широкое использование биметаллических тел (БМТ) в качестве элементов конструкций, в частности, электромагнитных переходников и электролизеров [11, 12], необходимо дальнейшее развитие упомянутых выше моделей для БМТ. В модели термомеханики однородных электропроводных тел при воздействии импульсных ЭМП (ИЭМП) учитывается адиабатический характер процессов их нагрева и деформирования, что основано на известных экспериментальных результатах [12-14]. При рассмотрении БМТ, подвергаемых воздействию ИЭМП, в отличие от однородных тел, необходимо учитывать также условия электромагнитного, теплового и механического контактов на поверхности соединения составных слоёв. В настоящей работе вариант теории термомеханики электропроводных тел при воздействии ИЭМП развит на БМТ.

2. Расчётная модель. Расчётная модель определения термонапряжённого состояния (ТНС) БМТ при воздействии ИЭМП состоит из трёх этапов [3]. На первом этапе в каждом n -ом ($n = 1, 2$) составном слое БМТ из соотношений Максвелла определяется нестационарное ЭМП, которое описывается вектором напряжённости

магнитного поля $\vec{H}^{(n)}$, и обусловленные им джоулевы тепловыделения $Q^{(n)}$ и пондеромоторные силы $\vec{F}^{(n)}$ с учётом заданных граничных условий на внешних поверхностях слоёв и условий идеального электромагнитного контакта на поверхности их раздела. На втором этапе из уравнения теплопроводности, в котором джоулевы тепловыделения $Q^{(n)}$ являются объёмными источниками тепла, определяется нестационарное температурное поле $T^{(n)}$ в каждом n -ом составном слое БМТ при условиях конвективного теплообмена с окружающей средой на внешних поверхностях и идеального теплового контакта на поверхности соединения составляющих тел. На третьем этапе из уравнений динамической термоупругости при найденных температуре $T^{(n)}$ и пондеромоторной силе $\vec{F}^{(n)}$ определяется вектор перемещений $\vec{u}^{(n)}$ и тензор динамических напряжений $\hat{\sigma}^{(n)}$ в каждом n -ом составном слое БМТ.

Для оценки несущей способности БМТ находятся интенсивности $\sigma_i^{(n)}$ суммарных напряжений $\hat{\sigma}^{(n)} = \hat{\sigma}^{(n)Q} + \hat{\sigma}^{(n)F}$ (обусловленные как джоулевым теплом, так и пондеромоторными силами) [16] в каждом n -ом составном слое по формуле [17]

$$\sigma_i^{(n)} = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(n)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)})) / 2}, \quad (1)$$

а их значения сравниваются с пределом упругого деформирования $\sigma_d^{(n)}$ материала n -го слоя. Здесь $I_j(\hat{\sigma}^{(n)})$ – j -ый инвариант тензора напряжений.

БМТ теряет несущую способность в целом, если её теряет хотя бы один из составляющих слоёв, то есть в n -ом составном слое

$$\max \sigma_i^{(n)} \leq \sigma_d^{(n)}. \quad (2)$$

Это условие соответствует условию Губера-Мизеса [17, 18] начала пластичности для изотропного тела, согласно которой пластические деформации возникают тогда, когда интенсивность напряжений достигает предела текучести материала при его растяжении.

В технических устройствах, элементами конструкций которых могут быть БМТ, важным также является сохранение свойств контактного соединения их составных слоёв. Для оценки предела сохранения этих свойств величины интенсивностей напряжений $\sigma_i^{(n)*}$ в составных слоях на поверхности их соединения сравниваются с пределом прочности σ_M контактного соединения. Если

$$\sigma_i^{(n)*} \leq \sigma_M, \quad (3)$$

то свойства контактного соединения сохраняются. Заметим, что величины $\sigma_d^{(n)}$ и σ_M для используемых в технике материалов составляющих слоёв БМТ известны из экспериментов [12, 19].

3. Исходные соотношения термомеханики БМТ при воздействии ИЭМП. Сформулируем исходные физические и математические предпосылки и запишем исходные соотношения для количественного описания параметров, характеризую-

ших электромагнитные, тепловые и механические процессы в БМТ при воздействии ИЭМП с модуляцией амплитуды. Такие ЭМП задаются значениями вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$ на внешних поверхностях составляющих слоёв БМТ в виде

$$\vec{H}(\vec{r}_s^{(n)}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_s^{(n)}, t) \equiv \vec{H}^0(\vec{r}_s^{(n)}, t) \sin(\omega t + \varphi_n). \quad (4)$$

Здесь $\vec{H}^0(\vec{r}_s^{(n)}, t) = H_*(t) \vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$ – модулированная амплитуда; $\vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$ – амплитуда несущего сигнала; $H_*(t)$ – функция импульсного характера изменения во времени t , описывающая сигнал, модулирующий амплитуду электромагнитных колебаний (амплитуду несущего сигнала) и удовлетворяющая условию: $H_*(t) \leq 1$ при $t \in [0, t_i]$, $H_*(0) = 0$, $H_*(t_i) = 0$; ω – частота несущего сигнала; t_i – время длительности электромагнитного воздействия; φ_n – начальная фаза, $\vec{r}$ и $\vec{r}_s^{(n)}$ – радиус-векторы точек объёма V и внешних поверхностей S_n составных слоёв БМТ.

Принимаем, что параметры ω , t_i , $\vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$, $H_*(t)$ являются такими, что воздействующее ИЭМП относится к классу импульсных «неразрушающих» ЭМП, действие которых ещё не приводит к возникновению ударных волн (с импульсом длиной менее долей секунды ($t_i < 0,01$ с)) и с наибольшим значением напряжённости магнитного поля на поверхностях тела $H_{\max} \leq 10^7$ А/м).

Материалы составляющих слоёв БМТ считаются однородными, изотропными, неэлектромагнитными, неферромагнитными, для которых электромагнитные и термоэлектрические эффекты несущественны, векторы индукций $\vec{D}^{(n)}$ и $\vec{B}^{(n)}$ параллельны векторам напряжённости соответственно электрического $\vec{E}^{(n)}$ и магнитного $\vec{H}^{(n)}$ полей, а токи проводимости $\vec{j}^{(n)}$ параллельны $\vec{E}^{(n)}$. Принимаем, что материальные уравнения электродинамики в каждом n -ом слое имеют вид:

$$\vec{D}^{(n)} = \varepsilon_n \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{B}^{(n)} = \mu_n \vec{H}^{(n)}, \quad \vec{j}^{(n)} = \sigma_n \vec{E}^{(n)}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \varepsilon_{*n}$; $\mu_n = \mu_0 \mu_{*n}$; ε_{*n} , μ_{*n} – относительные электрическая и магнитная проницаемости, σ_n – коэффициент электропроводности материала n -ого составного слоя, ε_0 , μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные.

При таких предположениях влияние ИЭМП на процессы теплопроводности и деформирования в электропроводящем теле, как и в известных моделях для квази-установившихся ЭМП [4], учитываем посредством обусловленных этим полем физических факторов – джоулевых тепловыделений и пондеромоторных сил, т.е.:

$$\vec{Q}^{(n)} = \sigma_n \vec{E}^{(n)} \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{F}^{(n)} = \sigma_n \mu_n \vec{E}^{(n)} \times \vec{H}^{(n)}. \quad (6)$$

Эти факторы приводят к возникновению нестационарных температурных и механических полей. Пондеромоторные моменты $\vec{M}^{*(n)} = \vec{M}_E^{*(n)} + \vec{M}_M^{*(n)}$ (где $\vec{M}_E^{*(n)} = \vec{P}^{(n)} \times \vec{E}^{(n)}$ – электрические моменты, $\vec{M}_M^{*(n)} = \vec{M}^{(n)} \times \vec{B}^{(n)}$ – магнитные моменты, $\vec{P}^{(n)} = \vec{D}^{(n)} - \varepsilon \vec{E}^{(n)}$, $\vec{M}^{(n)} = \vec{B}^{(n)} / \mu_{0n} - \vec{H}^{(n)}$ – соответственно, векторы поляризации и намагничивания) вследствие параллельности векторов индукций и

напряжённостей электрического и магнитного полей равны нулю. В таком приближении и при постоянных характеристиках материалов слоёв (в частности, равных средним значениям в рассматриваемом интервале изменения температур) исходные соотношения для количественного описания параметров, характеризующих электромагнитные, тепловые и механические процессы в телах при импульсном электромагнитном воздействии, согласно выбранной расчётной модели, формулируем в три этапа.

На первом этапе определяем параметры ЭМП в n -ом составном слое БМТ. При этом, в качестве ключевой функции выбираем вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$. Пренебрегая токами смещения для длительностей фронтов импульсного электромагнитного воздействия, превышающих 10^{-6} с и частот электромагнитных колебаний меньших, чем 10^8 Гц, на основе соотношений Максвелла и закона Ома при принятых допущениях [16]:

$$\text{rot} \vec{H}^{(n)} = \vec{j}^{(n)}, \quad \text{rot} \vec{E}^{(n)} = -\mu_n \frac{\partial \vec{H}^{(n)}}{\partial t}, \quad \vec{j}^{(n)} = \sigma_n E^{(n)} \quad (7)$$

получаем уравнения для определения $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$ в n -ом составном слое:

$$\Delta \vec{H}^{(n)} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial \vec{H}^{(n)}}{\partial t} = 0, \quad \text{div} \vec{H}^{(n)} = 0 \quad (8)$$

при краевых условиях

$$\vec{H}^{(n)}(\vec{r}_s, t) = \vec{H}_*^{(n)}(t) H_0^*(\vec{r}_s^{(n)}) \quad (9)$$

на внешних поверхностях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ n -го слоя и условиях идеального электромагнитного контакта на поверхности $\vec{r} = \vec{r}_*$ соединения составных слоёв БМТ:

$$\vec{H}^{(1)} = \vec{H}^{(2)}, \quad \text{rot} \vec{H}^{(1)} = k_\sigma \text{rot} \vec{H}^{(2)} \quad (10)$$

и нулевых начальных условиях

$$\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0. \quad (11)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $k_\sigma = \sigma_1 / \sigma_2$.

Удельные плотности джоулева тепла $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$ и пондеромоторных сил $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$ определяются формулами:

$$Q^{(n)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sigma_n} \left(\text{rot} H^{(n)}(\vec{r}, t) \right)^2, \quad (12)$$

$$F^{(n)}(\vec{r}, t) = \mu_n \cdot \text{rot} H^{(n)}(\vec{r}, t) \times H^{(n)}(\vec{r}, t). \quad (13)$$

На втором этапе при уже известном распределении джоулева тепла $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$ определяется температура $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ в n -ом слое БМТ из уравнений теплопроводности

$$\Delta T^{(n)} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n} \quad (14)$$

с учётом условий конвективного теплообмена с окружающей средой

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial n} + H(T^{(n)} - T_s^{(n)}) = 0 \quad (15)$$

на внешних поверхностях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ n -го слоя, условий

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \text{grad } T^{(1)} = k_\lambda \text{grad } T^{(2)} \quad (16)$$

идеального теплового контакта на поверхности $\vec{r} = \vec{r}_*$ соединения составных слоёв БМТ и начальных условий

$$T^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0. \quad (17)$$

Здесь $T^{(n)}$ – отклонение температуры от начальной $T_0^{(n)}$, К; $\partial T^{(n)} / \partial n = \vec{n} \text{grad } T^{(n)}$; $\vec{n}$ – вектор нормали к внешней поверхности $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$; $T^{(n)}$ – заданная постоянная температура окружающей среды на внешней поверхности n -го слоя, $H_n = H_{*n} / \lambda_n$ – относительный коэффициент теплоотдачи; H_{*n} – коэффициент теплоотдачи с внешних поверхностей n -го слоя; $k_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$; κ_n , λ_n – коэффициенты температуро- и теплопроводности материалов n -го слоя.

На третьем этапе при известных выражениях температуры $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ и поперечных сил $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$ из уравнений несвязанной динамической задачи термоупругости [3], записанных для n -го слоя, определяются параметры ТНС БМТ:

$$\text{div } \hat{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} = \rho_n \frac{\partial \vec{u}^{(n)}}{\partial t}, \quad \hat{\sigma}^{(n)} = 2G_n \left\{ \hat{e}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[e_{ij}^{(n)} - \alpha_n \frac{1+\nu_n}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} \right\}, \quad (18)$$

$$\hat{e}^{(n)} = \text{Def } \vec{u}^{(n)} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u}^{(n)} + \vec{u}^{(n)} \vec{\nabla}).$$

Здесь $\hat{e}^{(n)} = \{ e_{ij}^{(n)} \}$ – тензор деформаций; Def – деформатор; $\vec{\nabla}$ – оператор Гамильтона; $\hat{I} = \{ \delta_{ij} \}$ – единичный тензор; δ_{ij} – символ Кронекера; $\vec{\nabla} \vec{u}^{(n)}$, $\vec{u}^{(n)} \vec{\nabla}$ – диадное произведение векторов $\vec{\nabla}$ и $\vec{u}^{(n)}$; α_n , ν_n – коэффициенты линейного теплового расширения и Пуассона; $G_n = E_n / 2(1 + \nu_n)$ – модуль сдвига; E_n – модуль Юнга; ρ_n – плотность материала n -го слоя. Все теплофизические и физико-механические характеристики материалов составляющих слоёв считаются постоянными.

Уравнения (18) решаются при соответствующих краевых (тепловых и механических) и начальных условиях. В качестве начальных условий преимущественно задают значения вектора перемещений $\vec{u}^{(n)}$, скорости $\partial \vec{u}^{(n)} / \partial t$ и температуры $T^{(n)}$ во всей области каждого n -го составного слоя в начальный момент времени $t = 0$. Если эти функции равны нулю, то начальные условия имеют вид:

$$u_i^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} = 0, \quad T^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (19)$$

В зависимости от вида краевых условий, система уравнений (18) формулируется в перемещениях или в напряжениях. Если определяющими функциями задачи термоупругости являются температура $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ и тензор напряжений $\hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, t)$, то получаем систему уравнений

$$\text{Def} \left(\text{div} \hat{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} \right) = \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1 + \nu_n}{E_n} \hat{\sigma}^{(n)} + \left(\alpha_n T^{(n)} - \frac{\nu_n}{E_n} \sigma_*^{(n)} \right) \hat{I} \right], \quad (20)$$

а в случае определяющих функций $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ и $\vec{u}^{(n)}(\vec{r}, t)$ – систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \frac{1}{1 - 2\nu_n} \text{grad div} \right) \vec{u}^{(n)} - \frac{2(1 + \nu_n) \rho_n}{E_n} \frac{\partial^2 \vec{u}^{(n)}}{\partial t^2} = \\ = \frac{\alpha_n E_n}{1 - 2\nu_n} \text{grad} T^{(n)} - \frac{2(1 + \nu_n)}{E_n} \vec{F}^{(n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\sigma_*^{(n)} \equiv I_1(\hat{\sigma}^{(n)})$. Уравнения системы (20) решаем при краевых условиях

$$\hat{\sigma}^{(n)} \vec{n} = 0, \quad (22)$$

которые соответствуют отсутствию на внешних поверхностях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ составных слоёв силовой нагрузки, и условиях идеального механического контакта

$$\hat{\sigma}^{(1)} = \hat{\sigma}^{(2)}, \quad \text{div} \hat{\sigma}^{(1)} + \vec{F}^{(1)} = k_p \left(\text{div} \hat{\sigma}^{(2)} + \vec{F}^{(2)} \right) \quad (23)$$

на поверхности $\vec{r} = \vec{r}_*$ соединения составных слоёв БМТ и при начальных условиях (при $t = 0$):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \\ \frac{1}{2G_n} \frac{\partial \hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} + \left(\alpha_n \frac{\partial T^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial r} - \frac{\nu_n}{E_n} \frac{\partial \hat{\sigma}_*^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} \right) \hat{I} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $k_p = \rho_1 / \rho_2$.

Уравнения (21) в перемещениях решаем при краевых условиях

$$\left\{ \text{Def} \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1 - 2\nu_n} \left[\text{div} \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n (1 + \nu_n)}{1 - 2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} \right\} \vec{n} = 0, \quad (25)$$

которые соответствуют условиям (22), записанным относительно вектора перемещений $\vec{u}^{(n)}$ на свободных от силовой нагрузки внешних поверхностях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$, и условиях идеального механического контакта

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \text{Def } \vec{u}^{(1)} + \frac{\nu_1}{1-2\nu_1} \left[\text{div } \vec{u}^{(1)} - \frac{\alpha_1(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} T^{(1)} \right] \hat{I} = \\ & = k_E \left\{ \text{Def } \vec{u}^{(2)} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \left[\text{div } \vec{u}^{(2)} - \frac{\alpha_2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} T^{(2)} \right] \hat{I} \right\} \end{aligned}$$

на поверхности $\vec{r} = \vec{r}_*$ соединения составных слоёв БМТ, а также начальных условиях (при $t = 0$):

$$\vec{u}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (27)$$

Здесь $k_E = E_2(1+\nu_1)/E_1(1+\nu_2)$.

При найденном векторе $\vec{u}^{(n)}$ перемещений определяем компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}^{(n)}$ в n -ом слое из соотношений

$$\hat{\sigma}^{(n)} = 2G_n \left\{ \text{Def } \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[\text{div } \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} \right\}. \quad (28)$$

Для оценки вклада джоулева тепла $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$ и пондеромоторных сил $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$ в ТНС БМТ тензор напряжений $\hat{\sigma}^{(n)}$ и вектор перемещений $\vec{u}^{(n)}$ представляем в виде суммы двух составляющих:

$$\hat{\sigma}^{(n)} = \hat{\sigma}^{Q(n)} + \hat{\sigma}^{F(n)}, \quad \vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{Q(n)} + \vec{u}^{F(n)}, \quad (29)$$

обусловленных соответственно джоулевым теплом и пондеромоторной силой. Составляющие $\hat{\sigma}^{Q(n)}$ и $\vec{u}^{Q(n)}$ определяем из уравнений (20)-(21) при $\vec{F}^{(n)} = 0$, а составляющие $\hat{\sigma}^{F(n)}$ и $\vec{u}^{F(n)}$ – из этих же уравнений при $T^{(n)} = 0$.

При известных суммарных векторах перемещений $\vec{u}^{(n)}$ и тензорах напряжений $\hat{\sigma}^{(n)}$, с учётом формулы (28) для найденных перемещений $\vec{u}^{(n)}$, определяем по формуле (1) интенсивности напряжений в n -ом составном слое БМТ и на основании условий (2) и (3) исследуем несущую способность и сохранение свойств контактного соединения.

4. Численный анализ. С использованием рассмотренной выше математической модели термомеханики БМТ проведены числовые исследования интенсивности напряжений, несущей способности и свойств контактного соединения биметаллического слоя, изготовленного из стали X18H9T и меди при воздействии электромагнитного импульса (ЭМИ), который математически описывается функцией $H_0(t)$ в виде

$$H_0(t) = k_0 H_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}). \quad (30)$$

Здесь k_0 – нормировочный множитель, β_1 и β_2 – параметры, характеризующие соответственно, времена фронтов нарастания t_{iner} и убывания t_{dekr} ЭМИ продолжительности t_i , H_0 – максимальное значение напряжённости магнитного

поля в импульсе. Толщины составных слоёв одинаковы и равны 1 мм.

Изменение во времени интенсивности суммарных напряжений $\sigma_i^{(n)}$ на спае биметаллического слоя показано на рис. 1,а, а их распределение по толщине слоя в моменты времени $t = 10 \text{ мкс}$; 25 мкс ; 50 мкс (линии 1-3) – на рис. 1,б.

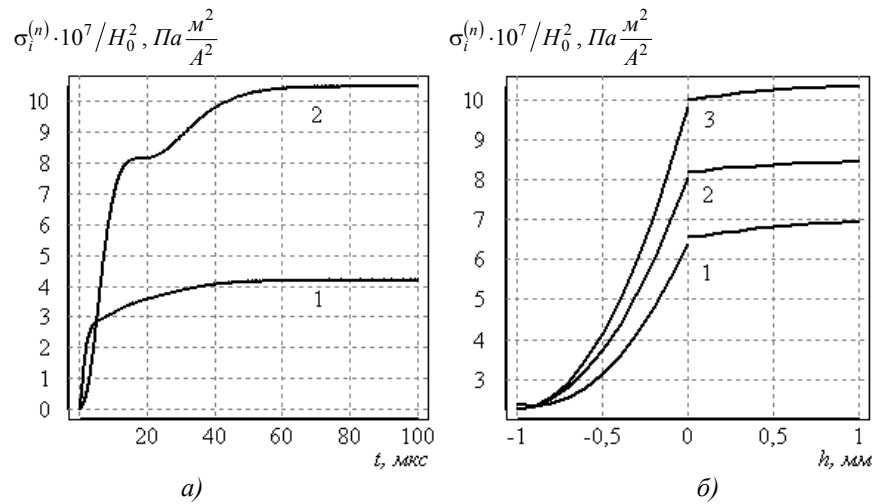


Рис. 1. Изменение во времени интенсивности напряжений $\sigma_i^{(n)}$ на спае (а) и по толщине биметаллического слоя (б) в разные моменты времени

Для рассматриваемого слоя зависимость максимальных значений интенсивностей напряжений $\sigma_{i \max}^{(n)}$ на спае от длительности t_i ЭМИ показаны на рис. 2.

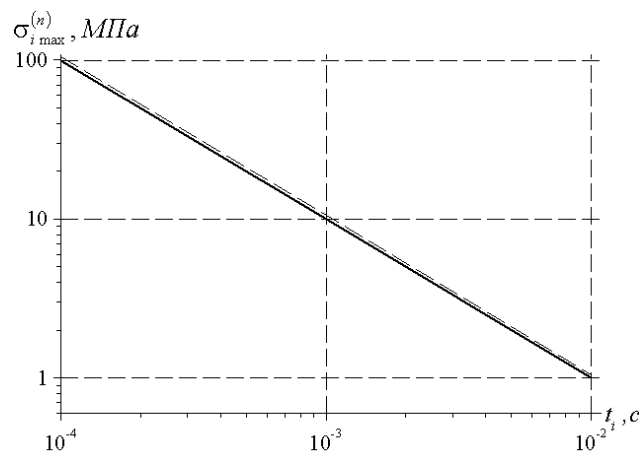


Рис. 2. Зависимость интенсивности напряжений $\sigma_{i \max}^{(n)}$ на спае от продолжительности t_i действия ЭМИ

Получено, что с возрастанием длительности t_i действия ЭМИ интенсивности напряжений $\sigma_i^{(n)}$ линейно убывают.

На рис. 3 приведены зависимости максимальных значений интенсивностей напряжений $\sigma_{i \max}^{(n)}$ на спае от величины H_0 для длительностей $t_i = 10^{-3} \text{ c}$; 10^{-4} c ; $4 \cdot 10^{-5} \text{ c}$.

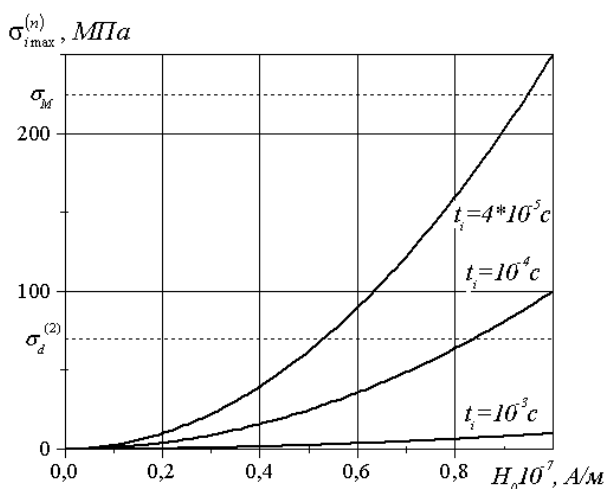


Рис. 3. Зависимость максимальных значений интенсивностей напряжений $\sigma_{i \max}^{(n)}$ на спае от величины H_0 при разных длительностях ЭМИ

Получено, что при действии ЭМИ предел прочности контактного соединения σ_M достигается при $t_i \leq 5 \cdot 10^{-5} \text{ c}$, а несущая способность теряется при $t_i \leq 7 \cdot 10^{-4} \text{ c}$.

Выводы. Развита математическая модель определения параметров ТНС БМТ при воздействии ИЭМП с учётом условий идеальных электромагнитного, теплового и механического контактов на поверхности соединения составляющих слоёв и сформулированы исходные соотношения термомеханики таких тел при постановке задачи в перемещениях и в напряжениях. С использованием критерия Губера-Мизеса предложена методика оценки несущей способности и свойств контактного соединения БМТ при импульсных электромагнитных воздействиях. Установлены критические значения параметров импульсных электромагнитных воздействий, при которых рассматриваемый биметаллический слой теряет несущую способность и свойства контактного соединения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. – Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1991. 144 с.

3. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1977. 248 с.
4. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. Киев: Наукова думка, 1992. 192 с.
5. Гачкевич А.Р., Мусий Р.С. Термомеханика электропроводных тел при воздействии неустановившихся электромагнитных полей. – Львов, 1993. – 54 с. – (Препринт / АН Украины. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Подстригача; № 3–93).
6. Gaczkiewicz A., Kasperski Z. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: OWPO, 1999. – 368 s.
7. Бурак Я.И., Гачкевич О.Р., Мусий Р.С. Термопружність неферромагнітних електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 75–84.
8. Гачкевич О.Р., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. - Львів, СПОЛОМ, 2011. - 216 с.
9. Мусий Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми: монографія. - Львів: Растр-7, 2010. - 216 с.
10. Nachkevych O.R., Ivas'ko R.O. Thermoelastic State of a Ferritic Layer in a Quasistationary Electromagnetic Field // Mat. Sci. – 2005. – Vol. 41, no. 3. – P. 376-387.
11. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хименко Л.Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Харьков: МОСТ - Торнадо, 2003. 288 с.
12. Мэттьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. М.: Техносфера, 2004. 408 с.
13. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. Методы генерации и физические эффекты, связанные с созданием импульсных полей мегаэрстедного диапазона. М.: Мир, 1972. 392 с.
14. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / Под ред. Ф. Херлаха. М.: Мир, 1988. 456 с.
15. Moon F.C. Magnetosolid mechanics. – New York: J. Wiley, 1984. – 436 p.
16. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
17. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Напряжения в телах при импульсивном нагружении. М.: Высш. школа, 1975. 463 с.
18. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
19. Баженов В.Г., Петров М.В. О применении магнитоимпульсного способа деформирования для исследования вязкопластических характеристик материалов // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности.: Всесоюз. межвуз. сб. Горьк. Ун- та, – 1980. – С. 18-25.

Сведения об авторах:

Аветисян Ара Сергеевич, Член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. Отделом «Динамика деформируемых систем и связанные поля» Института НАН Армении.

Адрес: пр. Баграмяна 24/2, г. Ереван, Армения, 0019.

E-mail: ara_avetisyan@sci.am

Мусий Роман Степанович, доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Национального университета «Львовская политехника», зав. кафедры биофизики, информатики и высшей математики Львовского медицинского института

Адрес: ул. С.Бандеры, 12, г. Львов, Украина, 79013.

E-mail: musiy@polynet.lviv.ua

Мельник Наталия Богдановна, кандидат физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры программного обеспечения Национального университета «Львовская политехника»

Адрес: ул. С.Бандеры, 12, г. Львов, Украина, 79013.

E-mail: melnyk.n.pz@gmail.com

Ивасько Роман Алексеевич, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела теории физико-механических полей Института прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины

Адрес: ул. Научная, 3-Б, г. Львов, Украина, 79060.

E-mail: dept13@iapmm.lviv.ua

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ РАВНОМЕРНО СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВНУТРЕННИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Keywords: doubly-periodic problem, piecewise uniform plane, inner inclusions.

Ключевые слова: задача двоякопериодическая, кусочно-однородная плоскость, деформируемое включение.

Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A.

The stress state of an piecewise uniform homogeneous layered plane with doubly periodic inner inclusions

Abstract. The plane stress state of piecewise homogeneous plane, formed by alternately junction of two heterogeneous stripes with same heights, made from different materials, with doubly periodic system of elastic inclusions on middle lines is considered. The system of governing singular integral equations of first kind with respect to shear contact stresses, acting on sides of inclusions is obtained. The ways for solutions of system are indicated. In special case, when only one of the repeating heterogeneous stripes is strengthened by doubly periodic system of elastic inclusions, the solution of problem is built by the method of mechanical quadratures.

Аннотация: В работе рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости, полученной путём поочерёдного соединения двух разнородных полос равных высот, изготовленных из различных материалов, на срединных линиях которых имеются двоякопериодические системы упругих включений. Получена система определяющих сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно касательных контактных напряжений, действующих на сторонах включений и указаны пути её решения. В частном случае, когда только одна из повторяющихся разнородных полос усилена двоякопериодической системой упругих включений, построено решение задачи методом механических квадратур.

Введение. Исследованию напряжённо-деформированного состояния однородных массивных тел, усиленных упругими накладками или включениями посвящено огромное количество работ. Из них отметим монографию [1], где приведены многие результаты, полученные в этом направлении. В монографиях [2,3] подытожены результаты исследований напряжённо-деформированного состояния однородных массивных тел с периодическими и двоякопериодическими дефектами. В работах [4-6] рассмотрены периодические и двоякопериодические задачи для равномерно кусочно-однородных, слоистых тел с межфазными дефектами, типа трещин и абсолютно жёстких включений, которые, по нашему мнению, актуальны с точки зрения слоистых композитов. Что же касается исследования напряжённо-деформированного состояния равномерно кусочно-однородных, слоистых тел с внутренней системой двоякопериодических упругих конечных включений, как нам известно, здесь рассматривается впервые.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , изготовленная при помощи поочерёдного соединения полос толщины $2h$ из разнородных материалов с коэффициентами упругости E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1 и ν_2 на срединных линиях разнородных полос

$y = (4n + 1)h$ и $y = (4n - 1)h$ ($n \in Z$) соответственно по линиям
 $L_j = (-b_j + 2ml; -a_j + 2ml) \cup (a_j + 2ml, b_j + 2ml)$ ($j = 1, 2; m \in Z$),
 симметрично расположенных относительно линии $x = 2nl$ ($n \in Z$), усилена
 периодической системой, с периодом $2l$, упругими тонкими включениями толщины
 h_j и приведёнными модулями деформаций $E_s^{(j)}$ ($j = 1, 2$). Будем считать, что
 плоскость деформируется под воздействием одинаковых и противоположно
 направленных сосредоточенных нагрузок $P_0^{(j)}$, приложенных в конечных точках
 включений $x = \pm a_j + 2nl$. Очевидно, что в этом случае линии $x = nl$ и
 $y = (2n + 1)h$ ($n \in Z$) являются линиями симметрии. Вследствие этого,
 поставленную задачу можно сформулировать как задачу для кусочно-однородного
 прямоугольника (базовой ячейки), занимающей на плоскости область
 $\Omega\{0 \leq x \leq l; |y| \leq h\}$, на границах и $y = \pm h$ которого вне включения заданы
 условия симметрии, а на интервалах (a_j, b_j) ($j = 1, 2$) – условия контакта
 включений с основанием. При этом, накладки, как обычно, будем трактовать как
 одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним
 сосредоточенных нагрузок и тангенциальных контактных напряжений находятся в
 одноосном напряжённом состоянии. Однако, как и в [7], изгибным эффектом накладок
 здесь не будем пренебрегать и будем считать, что вследствие малости толщины
 накладок и симметрии задачи относительно осей накладок, вертикальные смещения
 точек накладок равны нулю.

Требуется построить решения поставленной задачи и определить
 закономерности изменения контактных напряжений, действующих на сторонах
 включений в зависимости от упругих характеристик включения и разнородных
 полос.

Вследствие сделанных предположений, в зонах контакта включений с матрицей
 имеют место следующие условия контакта:

$$\frac{dV_j(x, (-1)^{j+1}h)}{dx} = 0; \quad \frac{dU_j(x, x, (-1)^{j+1}h)}{dx} = \varepsilon_j(x) \quad (x \in L_j; j = 1, 2) \quad (1.1)$$

где $V_j(x, y)$ и $U_j(x, y)$ – соответственно вертикальные и горизонтальные
 смещения точек базовой ячейки, а $\varepsilon_j(x, t)$ ($k = 1, 2$) – осевые деформации
 включений.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, обозначим через
 $\tau_j(x)$ ($j = 1, 2$) касательные контактные напряжения, действующие на длинные
 стороны включений и определим горизонтальные смещения точек сторон

$(y = \pm h; 0 \leq x \leq l)$ базовой ячейки при помощи этих функций. С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную граничную задачу:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0); \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0); \quad (0 < x \leq l) \\
U_1(x, 0) &= U_2(x, 0); \quad V_1(x, 0) = V_2(x, 0); \quad (0 < x \leq l) \\
\tau_{xy}^{(1)}(\pm l, y) &= U_1(\pm l, y) = 0; \quad (0 < y < h) \\
\tau_{xy}^{(2)}(\pm l, y) &= U_2(\pm l, y) = 0; \quad (-h < y < 0) \\
\frac{dV_j(x, (-1)^{j+1}h)}{dx} &= 0; \quad (0 < x < l) \\
\tau_{xy}^{(j)}(x, (-1)^{j+1}h) &= 0; \quad (x \notin (a_j, b_j)) \\
\tau_{xy}^{(j)}(x, (-1)^{j+1}h) &= -\tau_j(x); \quad (x \in (a_j, b_j))
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) – компоненты нормальных и касательных напряжений, действующих в соответствующих прямоугольниках.

Решение вспомогательной граничной задачи (1.2) будем строить при помощи бигармонической функции напряжений (функция Эри), которые для каждого из разнородных прямоугольников представим в виде рядов:

$$\begin{aligned}
F_j(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k^{(j)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(j)} \operatorname{sh} \alpha_k y + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_k y (C_k^{(j)} \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k^{(j)} \operatorname{sh} \alpha_k y) \right] \cos \alpha_k x \quad (j = 1, 2)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $(\alpha_k = \pi k / l; \quad 0 \leq x \leq l; \quad 0 \leq y \leq h)$ при $j = 1$ и $(-h \leq y \leq 0)$ при $j = 2$, а постоянные $A_k^{(j)}; B_k^{(j)}; D_k^{(j)}; C_k^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Учитывая соотношения, связывающие бигармонические функции с напряжениями и смещениями [1], удовлетворим условиям (1.2) и определим неизвестные коэффициенты $A_k^{(j)}, B_k^{(j)}, D_k^{(j)}, C_k^{(j)}$ через коэффициенты Фурье контактных напряжений $\tau_k^{(j)}$ ($j = 1, 2$). Получим:

$$\begin{aligned}
A_k^{(1)} &= A_k^{(2)} = -\left(\frac{\beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)} + \frac{1}{2}\right)(D_k^{(1)} + D_k^{(2)}) - \\
&\quad - \frac{1}{\alpha_k^2 \operatorname{sh} 2\beta_k} \left[\left(1 - \frac{\beta_k \operatorname{th} \beta_k}{2(1-v_1)}\right) \tau_k^{(1)} - \left(1 - \frac{\beta_k \operatorname{th} \beta_k}{2(1-v_2)}\right) \tau_k^{(2)} \right]; \\
B_k^{(1)} &= -A_k^{(1)} \operatorname{th} \beta_k - \frac{\beta_k D_k^{(1)}}{\operatorname{ch}^2 \beta_k} - \frac{\tau_k^{(1)} (1 - 2v_1 - \beta_k \operatorname{th} \beta_k)}{\alpha_k^2 \operatorname{ch} \beta_k}; \\
B_k^{(2)} &= A_k^{(2)} \operatorname{th} \beta_k + \frac{\beta_k D_k^{(2)}}{\operatorname{ch}^2 \beta_k} - \frac{\tau_k^{(2)} (1 - 2v_2 - \beta_k \operatorname{th} \beta_k)}{\alpha_k^2 \operatorname{ch} \beta_k}; \\
C_k^{(1)} &= -\operatorname{th} \beta_k D_k^{(1)} - \frac{\tau_k^{(1)}}{2(1-v_1) \alpha_k^2 \operatorname{ch} \beta_k}; \quad C_k^{(2)} = \operatorname{tg} \mu_k D_k^{(2)} - \frac{\tau_k^{(2)}}{2(1-v_2) \alpha_k^2 \operatorname{ch} \beta_k}; \\
D_k^{(1)} &= \frac{1}{\alpha_k^2 \Delta_k^{(1)} \operatorname{sh} \beta_k} \left\{ -\tau_k^{(1)} \left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-v_1)} \beta_k \operatorname{ch} \beta_k \right] + \vartheta_2 \tau_k^{(2)} \right\}; \\
D_k^{(2)} &= \frac{1}{\alpha_k^2 \Delta_k^{(2)} \operatorname{sh} \beta_k} \left\{ \vartheta_1 \tau_k^{(1)} - \tau_k^{(2)} \left[\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-v_2)} \beta_k \operatorname{th} \beta_k \right] \right\};
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{(1)} &= \frac{2(\vartheta_2 - \vartheta_1) \beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)} + \Delta_1; \quad \Delta_k^{(2)} = \frac{2(\vartheta_2 - \vartheta_1) \beta_k}{\operatorname{sh}(2\beta_k)} - \Delta_2; \quad \Delta_1 = \vartheta_2 + \vartheta_1 \mathfrak{a}_1; \\
\Delta_2 &= (\vartheta_1 + \vartheta_2 \mathfrak{a}_2); \quad \beta_k = \frac{\pi k}{l} h; \quad \vartheta_j = \frac{1+v_j}{E_j}; \quad \mathfrak{a}_j = 3 - 4\nu_j;
\end{aligned}$$

$$\tau_k^{(j)} = \frac{2}{l} \int_{a_j}^{b_j} \tau_j(x) \sin(\alpha_k x) dx \quad (j=1,2; k=1,2,\dots); \quad (1.4)$$

Подставляя полученные выражения коэффициентов в (1.3) и учитывая (1.4), можем выразить функцию напряжений, следовательно, и все величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в кусочно-однородном прямоугольнике при помощи неизвестных касательных контактных напряжений. В частности, для производных горизонтальных смещений в зонах контактов получим выражения:

$$\frac{dU_j(x, h)}{dx} = -\frac{q_j}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\tau_j(s) ds}{s-x} - \int_{a_1}^{b_1} K_{j1}(s, x) \tau_1(s) ds - \int_{a_2}^{b_2} K_{j2}(s, x) \tau_2(s) ds \quad (1.5)$$

$$(a_j < x < b_j; \quad j=1, 2).$$

Здесь введены обозначения

$$K_{ij}(s, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i,j)} \sin(\alpha_k s) \cos(\alpha_k x) + \delta_{ij} q_i \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(s+x)}{2l} - \frac{2l}{\pi(s-x)} \right];$$

$$\left(q_j = \frac{\vartheta_j \mathfrak{a}_j}{2(1-\nu_j)}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}; \quad (j=1, 2) \right); \quad (j=1, 2)$$

$$A_k^{(1,1)} = \frac{2\vartheta_1}{l} \left\{ \frac{\vartheta_2 (\mathfrak{a}_1 - \beta_k \operatorname{th} \beta_k - \beta_k \operatorname{cth} \beta_k)}{\Delta_k^{(1)} \operatorname{sh} 2\beta_k} \left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_1)} \beta_k \operatorname{th} \beta_k \right] + \frac{1}{\Delta_k^{(2)} \operatorname{sh} 2\beta_k} \times \right.$$

$$\left. \times \vartheta_1 \left(\frac{2\beta_k}{\operatorname{sh} 2\beta_k} + 1 \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\beta} \left(1 - \frac{\beta_k \operatorname{th} \beta_k}{2(1-\nu_1)} \right) + \frac{\mathfrak{a}_1 (\operatorname{th} \beta_k - 1)}{2(1-\nu_1)} + \frac{\beta_k}{2(1-\nu_1) \operatorname{ch}^2 \beta_k} \right\};$$

$$A_k^{(1,2)} = -\frac{2\vartheta_1}{l} \left\{ \frac{\vartheta_2 (\mathfrak{a}_1 - \beta_k \operatorname{th} \beta_k - \beta_k \operatorname{cth} \beta_k)}{\Delta_k^{(1)} \operatorname{sh} 2\beta_k} + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\beta} \left(1 - \frac{\beta_k \operatorname{th} \beta_k}{2(1-\nu_2)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta_k^{(2)} \operatorname{sh} 2\beta_k} \left(\frac{2\beta_k}{\operatorname{sh} 2\beta_k} + 1 \right) \left[\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_2)} \beta_k \operatorname{th} \beta_k \right] \right\};$$

$$A_k^{(2,1)} = \frac{2\vartheta_2}{l} \left\{ \frac{\vartheta_1 (\beta_k \operatorname{th} \beta_k + \beta_k \operatorname{cth} \beta_k - \mathfrak{a}_2)}{\Delta_k^{(2)} \operatorname{sh} 2\beta_k} + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\beta_k} \left(1 - \frac{\beta_k \operatorname{th} \beta_k}{2(1-\nu_1)} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta_k^{(1)} \operatorname{sh} 2\beta_k} \left(\frac{2\beta_k}{\operatorname{sh} 2\beta_k} + 1 \right) \left[\vartheta_2 - \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_2)} \beta_k \operatorname{th} \beta_k \right] \right\};$$

$$A_k^{(2,2)} = -\frac{2\vartheta_2}{l} \left\{ \frac{(\beta_k \operatorname{th} \beta_k + \beta_k \operatorname{cth} \beta_k - \alpha_2)}{\Delta_k^{(2)} \operatorname{sh} 2\beta_k} \left[\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2(1-\nu_2)} \beta_k \operatorname{th} \beta_k \right] - \right. \\ \left. - \frac{\vartheta_2 (2\beta_k + \operatorname{sh} 2\beta_k)}{\Delta_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 2\beta_k} + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\beta} \left(1 - \frac{\beta_k \operatorname{th} \beta_k}{2(1-\nu_2)} \right) + \frac{\alpha_2 (\operatorname{th} \beta_k - 1)}{2(1-\nu_2)} + \frac{\beta_k}{2(1-\nu_2) \operatorname{ch}^2 \beta_k} \right\};$$

Теперь перейдём к решению поставленной задачи. Для этого, используя соотношения (1.5), удовлетворим второму из уравнений (1.1). В результате, учитывая, что осевые деформации включений определяются формулами [1]:

$$\varepsilon_j(x) = \frac{1}{h_j E_s^{(j)}} \left[P_0^{(j)} - 2 \int_{a_j}^x \tau_j(s) ds \right] \quad (j=1,2) \quad (1.6)$$

для определения касательных контактных напряжений получим следующую систему сингулярных интегродифференциальных уравнений первого рода:

$$\frac{q_j}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\tau_j(s) ds}{s-x} + \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} K_{ji}(s,x) \tau_i(s) ds = -\frac{1}{h_j E_s^{(j)}} \left[P_0^{(j)} - 2 \int_{a_j}^x \tau_j(s) ds \right] \quad (1.7) \\ (a_j < x < b_j; \quad j=1,2).$$

Систему (1.7) нужно рассматривать при условиях равновесия включений:

$$\int_{a_j}^{b_j} \tau_j(s) ds = P_0^{(j)} / 2; \quad (j=1,2). \quad (1.8)$$

Чтобы построить решения системы (1.7) при условиях (1.8), при помощи замены переменных $\{s, x\} = p_j \{s, x\} + k_j$, где $p_j = (b_j - a_j) / 2$, $k_j = (b_j + a_j) / 2$, сформулируем эти уравнения на интервале $(-1, 1)$. Обозначив при этом

$$\varphi_j(t) = \frac{p_j \tau_j(p_j t + k_j)}{P_0^{(j)}}; \quad K_{ji}^*(\tau, t) = \frac{p_j}{q_j} K_{ji}(p_j \tau + k_j, p_j t + k_j); \\ \vartheta_j^* = \frac{2(1-\nu_j) p_j E_j}{h_j E_s^{(j)} \vartheta_j \alpha_j},$$

придём к следующей определяющей системе интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(\tau) d\tau}{\tau - t} + \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 K_{ji}^*(\tau, t) \varphi_i(\tau) d\tau = -\vartheta_j^* \left[1 - 2 \int_{-1}^t \varphi_j(\tau) d\tau \right] \quad (1.9)$$

$$(-1 < x < 1; \quad j = 1, 2),$$

при условиях

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(s) ds = 1/2; \quad (j = 1, 2). \quad (1.10)$$

Заметим, что систему (1.9) при условиях (1.10) можно решить как при помощи аппарата ортогональных многочленов Чебышева, приведя к квазивполне регулярной системе бесконечных алгебраических уравнений [1], а также методом механических квадратур [8].

2. Кусочно-однородная плоскость с двоякопериодической системой внутренних включений, расположенных в одной из повторяющихся полос

Не останавливаясь на решении системы (1.9), рассмотрим один важный частный случай поставленной задачи, когда только в одном из разнородных полос имеются периодически повторяющиеся включения, занимающие на краю базовой ячейки $y = h$ интервал (a_1, b_1) , на левом конце которого действует сосредоточенная нагрузка величины $P_0^{(1)}$. В этом частном случае из системы (1.9) получим следующее одно интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{-1}^1 K_{11}^*(\tau, t) \varphi_1(\tau) d\tau = -\vartheta_1^* \left[1 - 2 \int_{-1}^t \varphi_1(\tau) d\tau \right] \quad (2.1)$$

при условии

$$\int_{-1}^1 \tau_1(\tau) d\tau = 1/2 \quad (2.2)$$

Отметим, что в рассматриваемом частном случае безразмерные нормальные напряжения, действующие на длинных сторонах включений, можно вычислить по формуле:

$$\sigma_y^*(t) = \frac{p_1 \sigma_y^{(1)}(p_1 t + k_1)}{P_0^{(1)}} = \frac{1 - 2\nu_1}{2\pi(1 - \nu_1)} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{\tau - t} - \int_{-1}^1 R(\tau, t) \varphi_1(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned}
R(\tau, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} R_k \sin(\pi k \lambda_1 (\tau + \lambda_*)) \cos(\pi k \lambda_1 (t + \lambda_*)) - \\
& - \frac{\lambda_1 (1 - 2v_1)}{2(1 - v_1)} \left[\left[\operatorname{ctg} \frac{\pi \lambda_1 (\tau - t)}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi \lambda_1 (\tau + t + 2\lambda_*)}{2} - \frac{2}{\pi \lambda_1 (\tau - t)} \right]; \right. \\
R_k = & 2\lambda_1 \left\{ \frac{\vartheta_1 (1 + \beta_k \operatorname{th} \beta_k + \beta_k \operatorname{cth} \beta_k)}{\Delta_k^{(1)} \operatorname{sh} 2\beta_k} \left[1 - \frac{(1 + v_2) - \mu(1 + v_2)}{2(1 - v_1^2) \mu} \beta_k \operatorname{th} \beta_k \right] - \right. \\
& - \frac{\vartheta_1}{\Delta_k^{(2)} \operatorname{sh} 2\beta_k} \left(\frac{2\beta_k}{\operatorname{sh} 2\beta_k} + 1 \right) - \frac{1}{\operatorname{sh} 2\beta_k} \left(1 - \frac{\beta_k \operatorname{th} \beta_k}{2(1 - v_2)} \right) - \frac{\beta_k}{2(1 - v_1) \operatorname{ch}^2 \beta_k} \left. \right\}; \\
& (\mu = E_2 / E_1; \lambda_1 = p_1 / l).
\end{aligned}$$

Перейдём к решению интегрального уравнения (2.1) при условии (2.2). Не трудно установить, что искомая функция в концевых точках интервала интегрирования имеет корневую особенность. Исходя из этого, представим её в виде:

$$\varphi_1(t) = \varphi^*(t) / \sqrt{1 - t^2} \quad (2.3)$$

где $\varphi^*(t)$ – непрерывная гладкая функция, ограниченная вплоть до концов интервала интегрирования, которую будем аппроксимировать интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по корням ξ_i ($i = \overline{1, n}$) многочлена Чебышева $T_n(x)$:

$$\varphi^*(t) \approx \frac{2}{n + 2k} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi^*(\xi_i) T_n(t)}{(t - \xi_i) U_{n-1}(\xi_i)}, \quad T_n(\xi_i) = 0 \quad (2.4)$$

где $U_n(t)$ – многочлен Чебышева второго рода.

Подставляя значения функций $\varphi_1(t)$ из (2.3) в (2.1), (2.2), используя соотношение (2.4) и квадратурные формулы:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i \varphi^*(\xi_i)}{\xi_i - t} \left[1 - \frac{U_{n-1}(t)}{U_{n-1}(\xi_i)} \right]$$

$$\int_{-1}^t \varphi(\tau) d\tau = q(t) \int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau - \sqrt{1 - t^2} \sum_{i=1}^n w_i \varphi^*(\xi_i) l_i(t)$$

$$\int_{-1}^1 K_{11}^*(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n w_i \varphi^*(\xi_i) K_{11}^*(\xi_i, t)$$

где

$$w_i = 8h_n \frac{n}{1-\xi_i^2} \left[\frac{1}{nU_{n-1}(\xi_i)} \right]^2; \quad q(x) = \pi B_{\frac{1+x}{2}}(0.5, 0.5);$$

$$l_i(x) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\xi_i)U_{m-1}(x)}{2mh_m}; \quad h_m = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma(m+0.5)}{\Gamma(m+1)} \right]^2,$$

а $B_x(\alpha, \beta)$ и $\Gamma(\alpha, \beta)$ соответственно неполная бета- и гамма-функции Эйлера и выбирая корни $\eta_k (k = \overline{1, n-1})$ многочлена Чебышева второго рода $U_{n-1}(t)$ в качестве точек коллокации, получим следующую замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $\varphi^*(\xi_i)$:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi_i - t} + K_{11}^*(\xi_i, t) + 2\vartheta_j^* \sqrt{1-\eta_k^2} l_i(\eta_k) \right) w_i \varphi^*(\xi_i) =$$

$$= -\vartheta_j^* (1 - q(\eta_k)) \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi^*(\xi_i) = \frac{1}{2}$$

после определения которых нетрудно при помощи формулы (2.4) восстановить функцию $\varphi^*(t)$ ($-1 < t < 1$) и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в двухкомпонентной ячейке.

3. Численные расчёты и выводы.

Проведён численный расчёт поставленной задачи в случае, когда коэффициенты Пуассона разнородных полос и геометрические характеристики имеют следующие значения: $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,35$, $\lambda_1 = a/l = 0,2$, $\lambda_2 = h/l = 0,5$ и $p_1/h_1 = 10$. Изучены закономерности изменения безразмерных касательных и нормальных напряжений, действующих на длинные стороны включений в зависимости от соотношения модулей Юнга первой полосы и включений $\mu_1 = E_1/E_s$ при постоянном значении соотношений модулей Юнга разнородных полос $\mu = E_2/E_1$. На рис. 1 и 2 приведены соответственно графики приведённых касательных контактных напряжений $\varphi_1(t)$ и нормальных напряжений $\sigma_y^*(t)$ в зависимости от параметра μ_1 , когда $\mu = 0,5$.

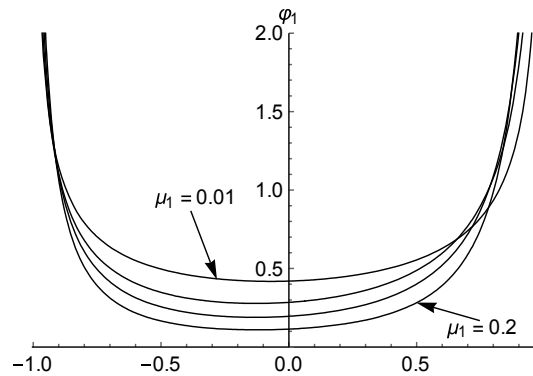


Рис.1. Касательные напряжения $\mu_1 = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$

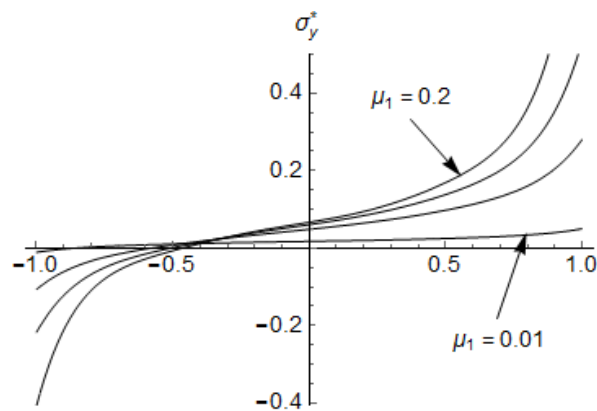


Рис.2. Нормальные напряжения $\mu_1 = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$

Из этих графиков видно, что при возрастании параметра μ_1 в средней части контактной зоны касательные напряжения увеличиваются, а нормальные напряжения уменьшаются. Численные расчеты показывают также, что при выбранных значениях геометрических параметров распределение контактных напряжений практически не зависит от изменения параметра μ .

Заключение. Впервые получена определяющая система сингулярных интегродифференциальных уравнений плоской теории упругости для равномерно кусочно-однородной плоскости из двух, периодически повторяющихся разнородных полос, усиленных двоякопериодической системой внутренних упругих включений и указаны пути её решений. В частном случае, когда только одна из разнородных полос усилена периодически повторяющимися включениями, построено численно-аналитическое решение этих уравнений. Показано, что чем жёстче включения, тем больше нормальные контактные напряжения приближаются к нулю, чем и ещё раз обосновывается гипотеза Меллана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
3. Барзокас Д.И., Фильштинский Л.А. Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах, том.1 - Москва-Ижевск, 2010г.-864с.
4. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородного пространство с периодической системой параллельных межфазных дефектов// Сборник трудов IV-ей международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015, С.28-32.
5. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Двойкопериодическая задача для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Сборник трудов IV-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван-2015, С.33-37.
6. Hakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128.
7. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединённых полубесконечной упругой накладкой. // В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций, посв. шестидесятилетию академика Ю.Н.Работнова.-М.: Машиностроение, 1975, с.44-51.
8. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Равномерное движение абсолютно жёсткого штампа по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра.// Сборник научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван, Изд-во ЕГУАС, 2010. Том 1. С.81-85.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, проф., директор Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

О ВДАВЛИВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАЛОК В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Амирбекян А.Н., Мхитарян С.М., Шемян Л.А.

Ключевые слова: упругость, полуплоскость, периодическая система балок, изгиб, контактное давление.
Key words: elasticity, half-plane, periodic system of beams, bending, contact pressure.

Amirbekyan A.N., Mkhitaryan S.M., Shekhan L.A.

On the indentation of the periodic system of beams in elastic half-plane

Abstract. The contact problem of the bending of the periodic system of beams on elastic foundation in the form of a half-plane under the plane strain conditions is investigated. The problem is considered by the generalized model of the bend in the framework of S.P. Timoshenko, where in addition to transverse forces axial compressive or tensile longitudinal forces also affect the deflection of the beams.

Аннотация: Рассматривается контактная задача об изгибе периодической системы балок на упругом основании в виде полуплоскости, находящейся в условиях плоской деформации, по обобщённой модели изгиба в рамках теории С.П. Тимошенко, где помимо поперечных сил, продольные сжимающие или растягивающие силы также влияют на прогибы балок.

Введение. Решение задачи об изгибе одинарной балки на упругой полуплоскости, по классической теории изгиба балок, методом интегральных уравнений изложено в [1]. В работе [2] эта же задача была рассмотрена по теории изгиба балки, учитывающей влияние сдвигающих сил, действующих на срединной линии балки, на её изгиб [3,4].

1. Постановка задачи. Пусть упругая полуплоскость $y \leq 0$, находящаяся в условиях плоской деформации, с модулем упругости E_1 и с коэффициентом Пуассона ν отнесена к правой прямоугольной системе координат Oxy . Пусть далее под действием вертикальных распределённых сил интенсивности $q(x)$ периодическая с периодом $2l$ система балок, с модулями упругости E и высот h , вдоль системы участков

$$L = \left\{ x \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [-a + 2kl, a + 2kl]; y = 0 \right\} \quad (a < l)$$

границы полуплоскости $y = 0$ вдавливаются в упругую полуплоскость (фиг.1). Для изгиба балок примем теорию С.П. Тимошенко, учитывающую влияние касательных сдвигающих сил T , действующих на срединных линиях балок, на их изгиб. Когда сдвигающие силы T сжимающие (как показаны в фиг.1), дифференциальное уравнение прогиба $v(x)$ балки, занимающей участок $x \in (-a, a)$ границы полуплоскости, имеет вид ([3], стр. 422)

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} + T \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a); \quad D = Eh^3/12 \quad (1)$$

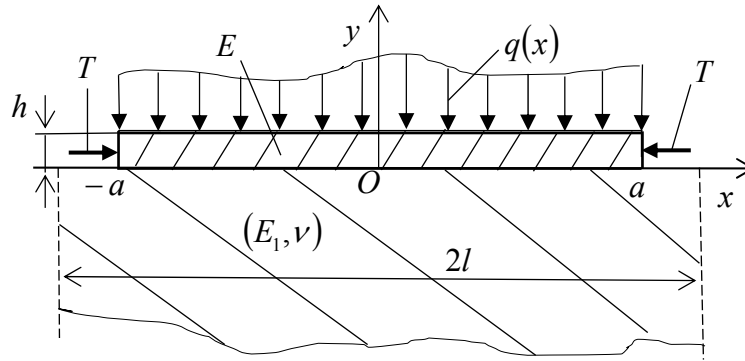
где D – жёсткость балки на изгиб, а $p(x)$ – неизвестное контактное давление балки на упругое основание. Далее, ввиду периодического характера задачи ограничимся только центральной балкой $[-a, a]$.

Так как изгибающие моменты $M(x)$ в сечении x балки $[-a, a]$ выражаются формулой

$$M(x) = D \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (-a \leq x \leq a),$$

то дифференциальное уравнение (1) можно записать также в виде

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + k^2 M = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a); \quad k = \sqrt{T/D}. \quad (2)$$



Фиг.1

Решение уравнения (2) при граничных условиях

$$M(x)|_{x=-a} = 0, \quad M(x)|_{x=a} = 0 \quad (3)$$

и при $0 < k < \pi/2a$ представляется формулой [2]

$$M(x) = \frac{1}{k \sin(2ka)} \int_{-a}^a [\cos^2(ka) \sin(kx) \sin(ks) - \sin^2(ka) \cos(kx) \cos(ks)] \times \\ \times [p(s) - q(s)] ds + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) [p(s) - q(s)] ds, \quad (-a \leq x \leq a) \quad (4)$$

а уравнения (1) для $dv(x)/dx$ при $x \in [-a, a]$ при тех же условиях (3) – формулой

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \left\{ \left[1 - \cos[k(x-s)] \right] \text{sign}(x-s) + \right. \\ \left. + \text{ctg}(ka) [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \text{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks) \right\} g(s) ds + C \quad (5)$$

где

$$g(x) = [p(x) - q(x)]/D.$$

Поперечные силы $Q(x)$ в сечении x балки $x \in [-a, a]$ будут иметь вид [2]

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left\{ \text{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks) + \text{ctg}(ka) \cos(kx) \sin(ks) + \right. \\ \left. + \cos[k(x-s)] \text{sign}(x-s) \right\} [p(s) - q(s)] ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (6)$$

В случае осевых растягивающих сил T , дифференциальное уравнение прогиба $v(x)$ балки, занимающей участок $x \in (-a, a)$ границы полуплоскости, принимает вид

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} - T \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a). \quad (7)$$

Тогда, в формулах (4)-(6) следует от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям. В итоге получим:

$$M(x) = \frac{1}{k \operatorname{sh}(2ka)} \int_{-a}^a (\operatorname{ch}^2(ka) \operatorname{sh}(kx) \operatorname{sh}(ks) - \operatorname{sh}^2(ka) \operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}(ks)) [p(s) - q(s)] ds + \\ + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \operatorname{sh}(k|x-s|) [p(s) - q(s)] ds, \quad (-a \leq x \leq a) \quad (8)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \left\{ \left[1 - \operatorname{ch}[k(x-s)] \right] \operatorname{sign}(x-s) + \right. \\ \left. + \operatorname{cth}(ka) [1 - \operatorname{ch}(kx)] \operatorname{sh}(ks) - \operatorname{th}(ka) \operatorname{sh}(kx) \operatorname{ch}(ks) \right\} g(s) ds + C, \quad (9)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left\{ \operatorname{th}(ka) \operatorname{sh}(kx) \operatorname{ch}(ks) + \operatorname{cth}(ka) \operatorname{ch}(kx) \operatorname{sh}(ks) + \right. \\ \left. + \operatorname{ch}[k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) \right\} [p(s) - q(s)] ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (10)$$

2. Решение задачи. Выведем определяющее сингулярное интегральное уравнение (СИУ) рассматриваемой задачи, откуда будет определяться контактное давление $p(x)$, а затем по формулам (4) и (6) или (8) и (10) будут определяться изгибающие моменты $M(x)$ и поперечные перерезающие силы $Q(x)$ в любых сечениях балок.

С этой целью воспользуемся известной формулой [5] для вертикальных перемещений $v_1(x)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости от периодически с периодом $2l$ распределённых вертикальных сил интенсивности $p(x)$:

$$v_1(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|\sin[\pi(x-s)/2l]|} p(s) ds + \text{const} \quad (-a < x < a). \quad (11)$$

Теперь воспользуемся условием контакта $dv_1/dx = dv/dx \quad (-a < x < a)$. В случае осевых сжимающих сил, на основании (5) и (11) придём относительно $p(x)$ к СИУ:

$$\frac{1-\nu^2}{E_1 l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi(s-x)}{2l} \right] p(s) ds + \frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a \left\{ [1 - \cos k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) + \operatorname{ctg}(ak) \times \right. \\ \left. \times [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \operatorname{tg}(ak) \sin(kx) \cos(ks) \right\} [p(s) - q(s)] ds + C \quad (-a < x < a). \quad (12)$$

В случае абсолютно жёстких балок (бесконечно больших значениях E) СИУ (12) совпадает с интегральным уравнением плоской контактной задачи для упругой полуплоскости с периодической системой штампов [5].

В случае же осевых растягивающих сил, на основании (9) и (11) СИУ принимает вид

$$\frac{1-v^2}{E_1 l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi(s-x)}{2l} \right] p(s) ds + \frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a \{ [1 - \operatorname{ch} k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) + \operatorname{cth}(ak) \times \\ \times [1 - \operatorname{ch}(kx)] \operatorname{sh}(ks) - \operatorname{th}(ak) \operatorname{sh}(kx) \operatorname{ch}(ks) \} [p(s) - q(s)] ds + C \quad (-a < x < a). \quad (13)$$

В уравнениях (12) и (13) введём безразмерные величины

$$\xi = \pi x/l; \quad \eta = \pi s/l; \quad \chi = ak; \quad \chi_1 = kl/\pi; \quad \lambda = 6E_1 (l/h)^3 / \pi^2 \chi^2 (1-v^2) E; \\ \alpha = \pi a/l; \quad \phi(\xi) = p(l\xi/\pi)/E_1; \quad h(\xi) = q(l\xi/\pi)/E_1; \quad \gamma_0 = C/2\pi(1-v^2). \quad (14)$$

В этих обозначениях определяющие СИУ задачи (12) и (13) принимают единый вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \left(\frac{\eta - \xi}{2} \right) \phi(\eta) d\eta + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} K(\xi, \eta) \phi(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi) + \gamma_0 \quad (15) \\ (-\alpha < \xi < \alpha),$$

где

$$K(\xi, \eta) = \{ 1 - \cos[\chi_1(\xi - \eta)] \} \operatorname{sign}(\xi - \eta) + \\ + \operatorname{ctg} \chi [1 - \cos(\chi_1 \xi)] \sin(\chi_1 \eta) - \operatorname{tg} \chi \sin(\chi_1 \xi) \cos(\chi_1 \eta) \quad (16)$$

в случае осевых сжимающих сил, и

$$K(\xi, \eta) = \{ 1 - \operatorname{ch}[\chi_1(\xi - \eta)] \} \operatorname{sign}(\xi - \eta) + \\ + \operatorname{cth} \chi [1 - \operatorname{ch}(\chi_1 \xi)] \operatorname{sh}(\chi_1 \eta) - \operatorname{th} \chi \operatorname{sh}(\chi_1 \xi) \operatorname{ch}(\chi_1 \eta) \quad (17)$$

в случае осевых растягивающих сил, а

$$f(\xi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} K(\xi, \eta) h(\eta) d\eta \quad (-\alpha < \xi, \eta < \alpha). \quad (18)$$

Запишем также условия равновесия балки $[-a, a]$:

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P; \quad P = \int_{-a}^a q(x) dx; \quad \int_{-a}^a x p(x) dx = M; \quad M = \int_{-a}^a x q(x) dx,$$

в которых также перейдём к безразмерным величинам (14). Они преобразуются в следующие:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} j(\xi) d\xi = P_0; \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \xi j(\xi) d\xi = M_0; \quad (P_0 = \pi P / l E_1; \quad M_0 = \pi^2 M / l^2 E_1). \quad (19)$$

Итак, решение СИУ (15) должно удовлетворять условиям (19). Отметим, что входящая в (15) функция $\varphi(\xi)$ характеризует контактное давление, а параметр γ_0 - угол поворота сечения балки $x = 0$, которое также подлежит определению.

3. Чтобы к СИУ (15), (19) применить известный численно-аналитический метод решения СИУ [5,6], основанный на квадратурных формулах Гаусса для обычных и сингулярных интегралов с ядром Коши, в них от ядра Гильберта $\operatorname{ctg}[(\eta - \xi)/2]$ перейдем к ядру Коши $1/(\eta - \xi)$ и от интервала $(-\alpha; \alpha)$ перейдем на интервал $(-1; 1)$. С этой целью в (15), (19), а также в (14), от переменных ξ и η перейдем к переменным t и u , полагая

$$t = \operatorname{tg}(\xi/2)/\operatorname{tg}(\alpha/2); \quad u = \operatorname{tg}(\eta/2)/\operatorname{tg}(\alpha/2); \quad (-1 < t, u < 1). \quad (20)$$

Отсюда

$$\xi = 2\operatorname{arctg}\left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right); \quad \eta = 2\operatorname{arctg}\left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right); \quad d\eta = 2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) du / \left(1 + u^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

Преобразуем ядро Гильберта:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\xi/2)\operatorname{tg}(\eta/2)}{\operatorname{tg}(\eta/2) - \operatorname{tg}(\xi/2)} = \frac{1 + ut \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{(u - t)\operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{(u - t)\operatorname{tg}(\alpha/2)} + t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

С учетом последнего, СИУ (15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u - t} + \frac{1 + t \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} L(u, t) \right] \varphi_0(u) du = \\ & = \frac{\lambda}{\pi} g_0(t) + \frac{\gamma_0 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad (-1 < t < 1), \end{aligned} \quad (21)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \varphi\left(2\operatorname{arctg}\left(t \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right); \quad g_0(t) = f\left(2\operatorname{arctg}\left(t \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right); \\ L(t, u) &= K\left(2\operatorname{arctg}\left(t \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2)\right), 2\operatorname{arctg}\left(u \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2)\right)\right) \quad (-1 < t, u < 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Входящие в (22) функции $\varphi(\xi)$, $f(\xi)$ и ядра $K(\xi, \eta)$ приведены в (14), (16)-(18).

При переходе к переменной t условия (19) преобразуются в условия

$$\int_{-1}^1 \varphi_0(t) dt = P_0; \quad 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{arctg}\left(t \cdot \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2}\right) \varphi_0(t) dt = M_0. \quad (23)$$

Таким образом, решение поставленной задачи окончательно свелось к решению СИУ (21) при условиях (23).

По цепочке формул (14) и (20) преобразуем также выражения изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$, выражающихся формулами (4) и (6) в случае осевых сжимающих сил:

$$\begin{aligned}
M_0(t) = & \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\chi_1 \sin 2\chi} \left[\cos^2 \chi \sin \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \sin \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin^2 \chi \cos \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \cos \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\chi_1} \sin \left(2\chi_1 \left| \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right| \right) \right\} [\varphi_0(u) - h_0(u)] du;
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
Q_0(t) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \operatorname{tg} \chi \sin \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \cos \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{ctg} \chi \cos \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \sin \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{sign}(t-u) \cos \left[2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} [\varphi_0(u) - h_0(u)] du,
\end{aligned} \tag{25}$$

а также (8) и (10) – в случае осевых растягивающих сил

$$\begin{aligned}
M_0(t) = & \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\chi_1 \operatorname{sh} 2\chi} \left[\operatorname{ch}^2 \chi \operatorname{sh} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \operatorname{sh} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{sh}^2 \chi \operatorname{ch} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \operatorname{ch} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\chi_1} \operatorname{sh} \left(2\chi_1 \left| \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right| \right) \right\} [\varphi_0(u) - h_0(u)] du; \\
Q_0(t) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \operatorname{th} \chi \operatorname{sh} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \operatorname{ch} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{cth} \chi \operatorname{ch} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) \operatorname{sh} \left(2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{sign}(t-u) \operatorname{ch} \left[2\chi_1 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(u \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} [\varphi_0(u) - h_0(u)] du.
\end{aligned}$$

Здесь введены новые обозначения

$$M_0(t) = \pi^2 M(l\xi/\pi)/l^2 E_1, \quad \xi = \operatorname{arctg}(t \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2));$$

$$Q_0(t) = \pi Q(l\xi/\pi)/l E_1; \quad h_0(t) = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} h \left(2 \operatorname{arctg} \left(t \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \right).$$

После решения СИУ (21) при условиях (23) основная характеристика задачи – контактное давление $p(x)$ ($-a < x < a$) – определится по цепочке формул (14) и (22).

Для решения СИУ (21) при условиях (23) вышеуказанным методом [6,7] искомое решение представим формулой

$$\Phi_0(t) = \Omega_0(t) / \sqrt{1-t^2} \quad (-1 < t < 1), \quad (26)$$

где $\Omega_0(t)$ – гильдеровская функция на отрезке $[-1;1]$. Тогда по известной процедуре [5,6] это СИУ сведётся к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left[\frac{1}{u_m - t_r} + \frac{t_r \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} L(t_r, u_m) \right] \Omega_0(u_m) = \\ = \frac{\lambda}{\pi} g_0(t_r) + \frac{\gamma_0 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1); \\ \sum_{m=1}^M \frac{\pi}{M} \Omega_0(u_m) = P_0; \quad \sum_{m=1}^M \frac{2\pi}{M} \operatorname{arctg}\left(u_m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \Omega_0(u_m) = M_0. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь $u_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2M}\pi\right)$ ($m = \overline{1, M}$), $t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right)$ ($r = \overline{1, M-1}$) – известные чебышевские узлы, т.е. корни, соответственно, многочленов Чебышева первого рода $T_M(u)$ и второго рода $U_{M-1}(t)$. Отметим, что система (27) состоит из $M+1$ уравнений со столько же неизвестными ($\Omega_0(u_1), \Omega_0(u_2), \dots, \Omega_0(u_M)$ и γ_0).

Чтобы систему линейных уравнений (27) записать в канонической форме, положим

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{M} \left[\frac{1}{u_m - t_r} + \frac{t_r \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} + \frac{\lambda \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} L(t_r, u_m) \right], & (m = \overline{1, M}, \quad r = \overline{1, M-1}); \\ -\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + t_r^2 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, & (m = M+1, \quad r = \overline{1, M-1}); \quad \frac{\pi}{M}, (m = M+1, \quad r = M); \\ 0, & (m = M+1, \quad r = M, M+1); \quad \frac{\pi}{M} \operatorname{arctg}\left(u_m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \quad (m = \overline{1, M}, \quad r = M+1); \end{cases}$$

$$a_r = \begin{cases} (\lambda/\pi) g_0(t_r), & (r = 1, 2, \dots, M-1); \\ P_0, & (r = M), \\ M_0, & (r = M+1), \end{cases}$$

$$X_m = \begin{cases} \Omega_0(u_m), & (m = 1, 2, \dots, M); \\ \gamma_0, & (m = M+1). \end{cases}$$

В результате, система (27) запишется в канонической форме:

$$\sum_{m=1}^{M+1} K_{rm} X_m = a_r \quad (r = \overline{1, M+1}) \quad (28)$$

Теперь введём следующие матрицы-столбцы:

$$a_r^{(1)} = \begin{pmatrix} (\lambda/\pi) g_0(t_1) \\ \vdots \\ (\lambda/\pi) g_0(t_{M-1}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_r^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ M-1 \\ M \\ M+1 \end{matrix}, \quad a_r^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ M \\ M+1 \end{matrix}.$$

Решение системы (28) при правой части $a_r^{(1)}$ обозначим через $X_m^{(1)}$, решение при правой части $a_r^{(2)}$ – $X_m^{(2)}$, а решение при правой части $a_r^{(3)}$ – $X_m^{(3)}$. Тогда решение (28) выразится формулой

$$X_m = X_m^{(1)} + P_0 X_m^{(2)} + M_0 X_m^{(3)} \quad (r = \overline{1, M+1}) \quad (29)$$

После решения системы (28), расчётная функция (26) в узлах u_m вычисляется по формуле

$$\Phi_0(u_m) = X_m / \sqrt{1 - u_m^2} \quad (r = \overline{1, M+1}),$$

а безразмерные изгибающие моменты $M_0(t)$ и поперечные силы $Q_0(t)$ в любой точке t , в частности, для случая осевых сжимающих сил, согласно (24) и (25) будут вычисляться, соответственно, по формулам:

$$\begin{aligned} M_0(t) = & \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left\{ \frac{1}{\chi_1 \sin 2\chi} \left[\cos^2 \chi \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(u_m \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin^2 \chi \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(u_m \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] + \frac{1}{2\chi_1} \times \right. \\ & \left. \times \sin \left(2\chi_1 \left| \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) - \arctg \left(u_m \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right| \right) \right\} \left[X_m - \sqrt{1 - u_m^2} h_0(u_m) \right]; \quad (-1 < t < 1) \\ Q_0(t) = & \sum_{m=1}^M \frac{1}{2M} \left\{ \tg \chi \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(u_m \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \ctg \chi \cos \left(2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) \sin \left(2\chi_1 \arctg \left(u_m \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \text{sign}(t - u_m) \times \right. \\ & \left. \times \cos \left[2\chi_1 \arctg \left(t \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) - \arctg \left(u_m \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \left[X_m - \sqrt{1 - u_m^2} h_0(u_m) \right]; \quad (-1 < t < 1) \end{aligned}$$

где X_m даётся формулой (29).

Заключение. Численный анализ рассмотренной здесь задачи можно провести по схеме, указанной в [2]. При этом, закономерности изменения основных характеристик задачи – контактных напряжений, изгибающих моментов и поперечных перерезающих сил вполне аналогичны изложенным в [2] результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
2. Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шемян Л.А. О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учётом сдвигающих сил в её срединной линии. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67, №1. С. 6-21.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания: М.: Наука, 1967. 266 с.
5. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis an solution of crack problems, pp. 368-425, Noordhoff Intern. Publ., 1973.
7. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl.Math., vol. 35, №1,1997. P. 173-185.

Сведения об авторах:

Амирбекян Аревик Норайровна –Институт механики НАН РА.

Тел.: (+37494)158590. E-mail: a.amirbekyan@mail.ru

Мхитарян Сурен Манукович – член корр. НАН РА, докт. физ.-мат. наук, проф., Институт механики НАН РА. Тел.: (+37410)621025; (+37493)936117.

E-mail: smkhitaryan@mechins.sci.am

Шемян Лаврентий Арамович – докт. физ.-мат. наук, проф., Институт механики НАН РА. Тел.: (+37499)283440. E-mail: lshekyan@mail.ru

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян Р.А.

Ключевые слова: высокотемпературная ползучесть, тепловая хрупкость, концепция поврежденности, плотность, параметр сплошности (поврежденности), сжимаемость, критерий хрупкого разрушения.
Key words: high temperature creep, thermal brittleness, the concept of damage, the density parameter integrity (damage), the compressibility, the criterion of brittle fracture.

Arutyunyan R.A. High temperature creep and long-time strength of metallic materials

Abstract. The results of theoretical and experimental studies on the problem of high-temperature creep and long-term strength of metallic materials are presented. Special attention is paid to the effect of thermal embrittlement. Based on the damage concept of Kachanov and Rabotnov, in the paper as a damage parameter an irreversible change in the density (loosening) of the material is considered. Taking into account the mass conservation law interrelated equations for creep strain and damage parameter are proposed. The approximate and exact solutions for creep strain and the parameter of continuity are received and long-term strength criteria is formulated. The corresponding theoretical curves are plotted. It is shown that the theoretical equations for the damage parameter describe well the experimental results for the change in the density during the high-temperature creep of different metallic materials.

Аннотация. Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований по проблеме высокотемпературной ползучести и длительной прочности металлических материалов. Особое внимание уделяется эффекту тепловой хрупкости. Основываясь на концепции поврежденности Качанова и Работнова, в работе в качестве параметра поврежденности рассматривается необратимое изменение плотности (разрыхление) материала. На основе этого параметра и с учетом закона сохранения массы предложены взаимосвязанные уравнения для деформации ползучести и параметра поврежденности. Получены приближенные и точные решения для деформации ползучести и параметра сплошности и сформулированы критерии длительной прочности. Построены соответствующие теоретические кривые. Показано, что теоретические соотношения для параметра поврежденности описывают хорошо экспериментальные результаты по изменению плотности в процессе высокотемпературной ползучести различных металлических материалов.

1. Основные этапы исследований ползучести и длительной прочности металлических материалов.

Конец девятнадцатого и начало двадцатого веков характеризуются интенсивной эксплуатацией различных паросиловых машин и установок. Для увеличения коэффициента полезного действия постоянно повышаются рабочие температуры с выходом в область температур, при которых возможно проявление эффекта ползучести.

Первые исследования явления ползучести были выполнены Коста де Андраде [1], результаты которых обобщены в статье, опубликованной в 1910 г. В этой работе, в частности, изучены все участки кривой ползучести и предложена соответствующая терминология, которая впоследствии стала общепризнанной.

Следующий значительный вклад в теорию ползучести был внесен Нортоном в 1929 г. Изучая кривые ползучести для различных уровней напряжений, он сформулировал закон, по которому скорость установившейся ползучести $\dot{\varepsilon}$ в зависимости от напряжения выражается соотношением $\dot{\varepsilon} = B\sigma^m$, $\varepsilon = \ln l / l_0$ (l_0 , l – соответственно, начальная и текущая длина растягиваемого образца), B , m – постоянные.

В инженерной практике серьезное внимание на явление ползучести стали обращать в связи с аварийными разрушениями котлов, паровых и газовых турбин и

т.д., работающих в условиях заметной ползучести. В сороковых – пятидесяти годах прошлого столетия были начаты длительные испытания на разрушение при ползучести в различных странах. В некоторых странах эти работы продолжаются и в настоящее время.

На практике часто используются эмпирические критерии длительной прочности в виде степенной или экспоненциальной зависимости между временем до разрушения t_p и напряжением σ

$$t_p = B\sigma^{-b}, \quad (1.1)$$

$$t_p = C \exp(-\beta\sigma), \quad (1.2)$$

где B , b , C , β – постоянные.

Эти критерии описывают ограниченный участок экспериментальных кривых длительной прочности, которые обычно представляются прямыми линиями в логарифмических или полулогарифмических координатах.

Участки вязкого и хрупкого разрушения на кривой длительной прочности определяют два предельных состояния металлических материалов, первое, близкое к вязкому течению, реализуется при воздействии относительно больших напряжений и высоких температур. Другой предельный случай реализуется при длительном воздействии малых напряжений и высоких температур. В этих условиях **металлические** материалы охрупчиваются (эффект тепловой хрупкости). В результате, например, некоторые жаропрочные материалы разрушаются при длительных испытаниях с удлинением около одного процента

В связи с практическими приложениями, проблема ползучести и длительной прочности стала предметом многочисленных исследований методами физики, материаловедения, механики. Далее основное внимание будет уделено решению этой проблемы методами механики материалов. С помощью этих методов были сформулированы критерии длительной прочности в работах Качанова и Работнова.

2. Параметры сплошности и поврежденности и критерий хрупкого разрушения.

Критерий хрупкого разрушения впервые был сформулирован Л.М. Качановым в 1958 г. [2]. Аналогичный критерий был рассмотрен Работновым в 1959 г. [3, 4]. Вводились параметры сплошности ψ (Л.М. Качанов) и параметр поврежденности $\omega = 1 - \psi$ (Ю.Н. Работнов). Считается, что $1 \geq \psi \geq 0$ (соответственно $0 \leq \omega \leq 1$) и что в момент разрушения $\psi = 0$ ($\omega = 1$). Параметр поврежденности задается помощью следующего кинетического уравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = A \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n = A \left(\frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^n \left(\frac{F_0}{F} \right)^n, \quad (2.1)$$

где A , n – постоянные, $\sigma = \sigma_0 F_0 / F$ – истинное напряжение, σ_0 – номинальное напряжение, F_0 – начальная, F – текущая площадь поперечного сечения образца.

В работе Качанова [2] параметр сплошности вводится без придания ему физического содержания. В работах Работнова [3-4] параметр поврежденности задается соотношением $\omega = F_T / F_0$ (где F_T – площадь пор и трещин, располагающихся к моменту времени t в поперечном сечении растягиваемого образца. Из соотношения

$F = F_0 - F_T$ следует $F = F_0(1 - \omega)$ (F – текущая площадь поперечного сечения образца).

Считается, что в области хрупких разрушений деформации малы, поэтому можно считать $F \approx F_0$, тогда решение уравнения (2.1) при начальном условии $t = 0$, $\omega = 0$ имеет вид

$$\omega = 1 - \left[1 - A(n+1) \sigma_0^n t \right]^{1/n+1} \quad (2.2)$$

Однако, из условия $F \approx F_0$ следует $\omega = 0$ или $\psi = 1$, т.е. теряет смысл само понятие сплошности или повреждённости, а из закона сохранения массы $F_0 / F = (l / l_0)(\rho / \rho_0)$ (l_0 , ρ_0 – начальные, l , ρ – текущие длина и плотность образца) следует, что деформация ползучести не равна нулю, а определяется величиной относительного изменения плотности и равна $\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{\rho_0}{\rho}$. Как будет

показано далее, это следствие может быть основным при физическом определении параметра повреждённости и формулировке критерия хрупкого разрушения.

Время чисто хрупкого разрушения следует из (2.2) при условии $\omega = 1$

$$t_p^x = \frac{1}{(n+1) \cdot A \sigma_0^n} \quad (2.3)$$

3. Теория Ю.Н. Работнова.

Для учёта взаимосвязанных процессов повреждённости и деформации ползучести Ю.Н. Работнов предложил следующую систему уравнений [4]:

$$\dot{\varepsilon} = b \sigma^m (1 - \omega)^{-q}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\omega} = c \sigma^n (1 - \omega)^{-r}, \quad (3.2)$$

где b , c , m , n , q , r – постоянные.

В случае чисто хрупкого разрушения и малых деформаций считается, что $F \approx F_0$, $\sigma = \sigma_0 = \text{Const}$ и из решения системы уравнений (3.1) и (3.2) следуют критерии чисто вязкого и хрупкого разрушения и соотношение для деформации ползучести (согласно обозначениям в уравнениях (3.1) и (3.2).

$$t_p^v = \frac{1}{c(1+r)\sigma_0^n}, \quad t_p^b = \frac{1}{bm\sigma_0^m},$$

$$\varepsilon = \frac{k}{m} \frac{t_p^v}{t_p^b} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{t_p^x} \right)^{1/k} \right], \quad (3.3)$$

где $t = t_p^v$ – время вязкого разрушения, $k = \frac{r+1}{r+1-g}$.

При рассмотрении случая больших деформаций принимается условие несжимаемости, тогда напряжение выражается следующей формулой: $\sigma = \sigma_0 \exp(\varepsilon)$,

а система уравнений (3.1) и (3.2) имеют вид [4]:

$$\dot{\varepsilon} = b\sigma_0^m (1 - \omega)^{-q} \exp(m\varepsilon), \quad (3.4)$$

$$\dot{\omega} = c\sigma_0^n (1 - \omega)^{-r} \exp(n\varepsilon) \quad (3.5)$$

Соотношение для деформации ползучести согласно решению уравнений (3.4)-(3.5) имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{m-n} \ln \left[1 - v + v(1 - \omega)^{r-g+1} \right], \quad m \neq n, \quad (3.6)$$

$$\text{где } v = \frac{m-n}{r-g+1} \cdot \frac{b}{c} \sigma_0^{m-n}.$$

Эти решения, полученные при предположении о несжимаемости среды, противоречат самой концепции поврежденности, которое предполагает наличие дефектного состояния и его эволюция в процессе высокотемпературной ползучести.

4. Теория ползучести и длительной прочности, основанная на концепции разрыхления.

Были предложены различные варианты материализации параметра повреждаемости непосредственно в физических опытах. Наиболее распространенными можно считать опыты, в которых изучается число, размер и распределение пор в процессе ползучести. Согласно этим исследованиям в качестве параметра поврежденности рассматривалась относительная величина пор – число пор отнесенное к площади поперечного сечения образца. Другие авторы считают необратимое изменение объема (разрыхление по терминологии В.В.Новожилова [5]) или плотности [6, 7] наиболее представительной характеристикой поврежденности и в опытах на долговременную прочность и ползучесть изучаются изменения этих характеристик.

Далее считаем, что пористость является основной характеристикой поврежденности, а в качестве интегральной меры пористости принимается изменение плотности, разрыхление материала. В соответствии с этими представлениями, параметр поврежденности определяется соотношением $\psi = \rho / \rho_0$, $\omega = 1 - \psi$. В начальном состоянии $\rho = \rho_0$, $\omega = 0$, в момент разрушения $\rho \rightarrow 0$ $\omega = 1$. Далее сформулируем взаимосвязанные уравнения для деформации ползучести и параметра поврежденности ψ .

Отмеченные противоречия в концепции Качанова-Работнова можно преодолеть, если считать материал сжимаемым. Рассмотрим следующую систему уравнений для скорости ползучести и параметра сплошности (поврежденности) $\psi = \rho / \rho_0$

$$\psi^\beta \frac{d\varepsilon}{dt} = B\sigma^m, \quad (4.1)$$

$$\psi^\alpha \frac{d\psi}{dt} = -A\sigma^n, \quad (4.2)$$

где B , α , β – постоянные, $\sigma = \sigma_0 F_0 / F$. В начальном состоянии $\rho = \rho_0$, $\omega = 0$, $\psi = 1$, в момент разрушения $\rho = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 1$.

Учитывая закон сохранения массы и истинное напряжение $\sigma = \sigma_0 F_0 / F = \sigma_0 (l / l_0) (\rho / \rho_0) = \sigma_0 (\rho / \rho_0) e^\varepsilon = \sigma_0 \psi e^\varepsilon$, уравнения (4.1)-(4.2) можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B \sigma_0^m \psi^{m-\beta} e^{m\varepsilon}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \sigma_0^n \psi^{n-\alpha} e^{n\varepsilon} \quad (4.4)$$

Система уравнений (4.3)-(4.4) при $\alpha = \beta = 0$ рассматривалась в работе [7].

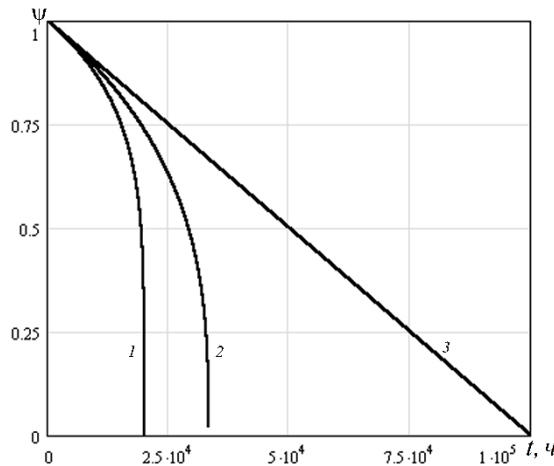
Аналитическое решение системы (4.3)-(4.4) в общем виде не представляется возможным. Вначале рассмотрим некоторые приближённые решения. Если ограничиться случаем малых деформаций, тогда можно считать $e^{n\varepsilon} \approx 1$, $e^{m\varepsilon} \approx 1$, и из решения системы (4.3)-(4.4) при начальных условиях, соответственно, $t = 0$, $\varepsilon = 0$ и $t = 0$, $\psi = 1$, следуют соотношения для деформации ползучести и параметра повреждённости

$$\varepsilon = \frac{B \sigma_0^{m-n}}{A \gamma} \left\{ 1 - \left[1 - (\alpha - n + 1) A \sigma_0^n t \right]^{\frac{\gamma}{\alpha - n + 1}} \right\}, \quad (4.5)$$

$$\psi(t) = \left[1 - (\alpha - n + 1) A \sigma_0^n t \right]^{\frac{1}{\alpha - n + 1}}, \quad (4.6)$$

где $\gamma = m - \beta + \alpha - n + 1$.

На фиг.1 представлены кривые изменения параметра сплошности согласно формуле (4.6) при различных значениях коэффициента α ($\alpha = 6$ – кривая 1, $\alpha = 4$ – кривая 2 и $\alpha = 2$ – кривая 3). При расчётах были приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2$, $A = 10^{-9} [\text{МПа}]^{-2}$, $\sigma_0 = 100 \text{ МПа}$.



Фиг. 1. Кривые изменения параметра сплошности согласно формуле (4.6) при различных значениях коэффициента α .

Принимая условие разрушения $t = t_f$, $\psi = 0$, из (4.6) получим критерий длительной прочности

$$t_f^b = \frac{1}{(\alpha - n + 1) \cdot A \sigma_0^n} \quad (4.7)$$

При $\alpha = 2n$ критерий (4.7) совпадает с критерием Качанова-Работнова (2.3).

На фиг. 2 в двойных логарифмических координатах показаны кривые длительной прочности согласно формуле (4.7) для разных значений коэффициента α : $\alpha = 6$ – кривая 1, $\alpha = 4$ – кривая 2 и $\alpha = 2$ – кривая 3. При расчётах были приняты следующие значения коэффициентов: $n = 2$, $A = 10^{-9} [\text{МПа}]^{-2}$.

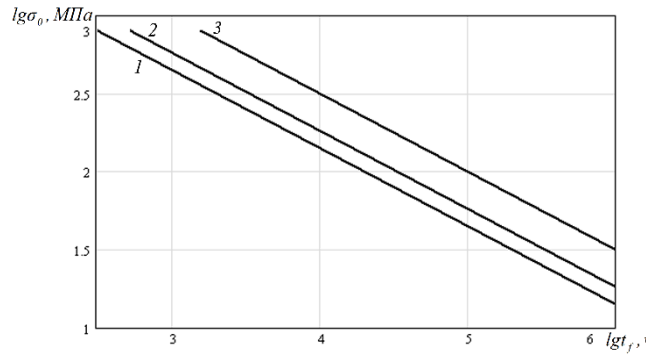


Рис. 2. Кривые длительной прочности согласно формуле (4.7) для разных значений коэффициента α .

5. Приближённое и точное решения для функции повреждённости $\psi(\varepsilon)$.

В случае малых деформаций при $e^{n\varepsilon} \approx 1$, $e^{m\varepsilon} \approx 1$ из системы уравнений (4.3)-(4.4) следует:

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon} = -\frac{A}{B} \sigma_0^{n-m} \psi^{n-\alpha-m+\beta} \quad (5.1)$$

Решение уравнения (5.1) при начальных условиях $\psi = 1$, $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$\psi(\varepsilon) = \left[1 - \frac{A \sigma_0^{n-m} (1 - n + \alpha + m - \beta)}{B} \varepsilon \right]^{\frac{1}{1-n+\alpha+m-\beta}} \quad (5.2)$$

В общем случае из системы уравнений (4.3)-(4.4) можно получить точное решение для функции повреждённости $\psi(\varepsilon)$. С этой целью разделив уравнение (3.5) на (3.4), получим

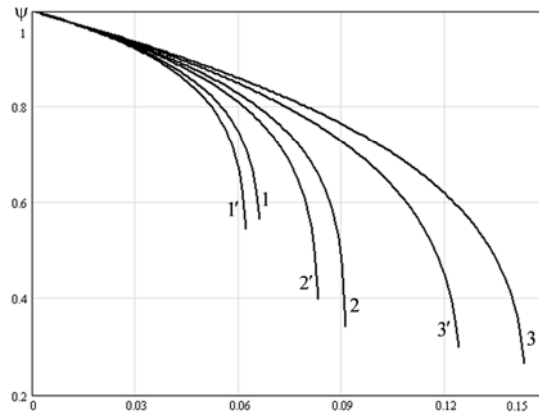
$$\frac{d\psi}{d\varepsilon} = -\frac{A}{B} \sigma_0^{n-m} \psi^{n-\alpha-m+\beta} e^{(n-m)\varepsilon} \quad (5.3)$$

Решение уравнения (5.3) при начальных условиях $\psi = 1$, $\varepsilon = 0$ имеет вид

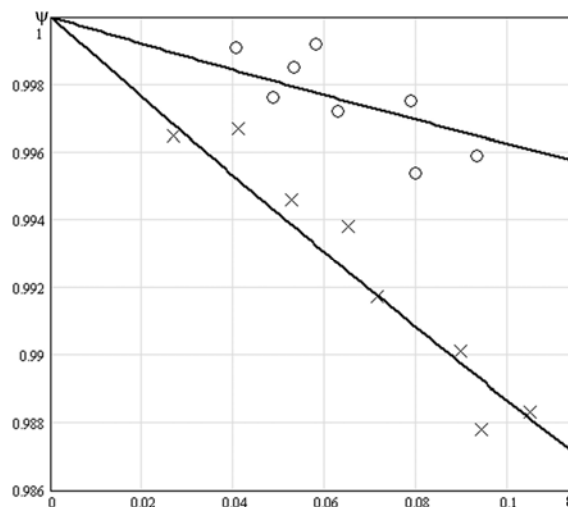
$$\psi(\varepsilon) = \left[1 - \frac{A \sigma_0^{n-m} (1 - n + \alpha + m - \beta)}{B(m-n)} (1 - e^{-(m-n)\varepsilon}) \right]^{\frac{1}{1-n+\alpha+m-\beta}} \quad (5.4)$$

На фиг.3 показаны кривые $\psi(\epsilon)$ согласно соотношениям (5.2) и (5.4) для различных значений параметра α ($\alpha = 6$ – кривая 1, 1', $\alpha = 4$ – кривая 2, 2' и $\alpha = 2$ – кривая 3, 3') и коэффициентов: $A = 10^{-9} [\text{МПа}]^{-2}$, $B = 5 \cdot 10^{-14} [\text{МПа}]^{-4}$, $\sigma_0 = 100 \text{ МПа}$, $n = 2$, $m = 4$, $\beta = 1$.

Как видно из рис.3, характер изменения кривых поврежденности по формулам (5.2) и (5.4) идентичны.



Фиг. 3. Кривые поврежденности согласно соотношениям (5.2) и (5.4) для различных значений параметра α .

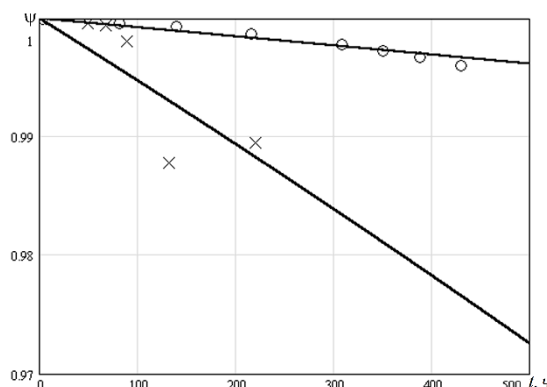


Фиг. 4. Теоретические кривые изменения плотности согласно решению (5.4) и экспериментальные точки для образцов из меди.

Для экспериментального обоснования предложенного в работе параметра поврежденности ψ были использованы имеющиеся в мировой научной литературе [8-14] результаты опытов по изменению плотности в процессе ползучести, полученные для различных металлов и сплавов: медь, алюминий, никель, сплав Magnox AL80, сплав никель – 0.1% палладия, различные жаропрочные сплав. Опыты

выполнялись при различных температурах и уровнях растягивающих напряжений. На фиг. 4, 5 показаны теоретические кривые изменения плотности согласно решениям (5.4), (4.6).

На фиг. 4 представлены результаты опытов по изменению плотности в процессе ползучести для образцов из меди, испытанных при температурах 500°C (кружочки) [9] (при расчётах использовались следующие коэффициенты: $n=2$, $m=4$, $\beta=1$, $B=7 \cdot 10^{-12} [\text{МПа}]^{-4}$, $A=3,5 \cdot 10^{-10} [\text{МПа}]^{-2}$, $\sigma_0=35 \text{ МПа}$, $\alpha=6$) и 250°C (крестики) [12] (при расчётах использовались следующие коэффициенты: $n=2$, $m=4$, $\beta=1$, $B=7 \cdot 10^{-12} [\text{МПа}]^{-4}$, $\alpha=6$, $\sigma_0=73 \text{ МПа}$, $A=4,5 \cdot 10^{-9} [\text{МПа}]^{-2}$).



Фиг. 5. Теоретические кривые изменения плотности согласно решению (4.6) и экспериментальные точки для образцов из алюминия и сплава никеля.

На фиг. 5 представлены результаты аналогичных опытов для образцов из алюминия, испытанных при температуре 250°C (кружочки) [11] (при расчётах использовались следующие коэффициенты: $n=2$, $\alpha=6$, $\sigma_0=138 \text{ МПа}$, $A=4 \cdot 10^{-10} [\text{МПа}]^{-2}$) и сплава никеля, испытанных при температуре 503°C (крестики) [12] (при расчётах использовались следующие коэффициенты: $n=2$, $\alpha=6$, $\sigma_0=20 \text{ МПа}$, $A=1,3 \cdot 10^{-7} [\text{МПа}]^{-2}$). Времена выдержки под нагрузкой до разрушения варьировались в пределах 30-500 часов. На этом временном интервале функция повреждённости выражается в виде прямой линии, а экспериментальные точки согласуются с теоретическими кривыми. При этом они имеют общий характер независимо от материала и температурно-силовых воздействий, что указывает на существование единой закономерности процессов повреждённости и подтверждает косвенно правильность выбора физического параметра повреждённости.

6. Заключение.

В работе учитывается сжимаемость металлических материалов и в качестве параметра сплошности рассматривается необратимое изменение плотности. На основе этого параметра и с учётом закона сохранения массы предложены взаимосвязанные уравнения для деформации ползучести и параметра сплошности. Получены аналитические выражения для деформации ползучести и параметра сплошности и сформулированы критерии длительной прочности. Построены соответствующие

теоретические кривые. Показано, что теоретические кривые для параметра повреждённости описывают хорошо экспериментальные результаты по изменению плотности в процессе высокотемпературной ползучести различных металлических материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-03159).

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrade E.N. On the viscous flow of metals and allied phenomena // Proc. Roy. Soc. 1910. vol. 84. N A567. P. 1-12.
2. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26-31.
3. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5-7.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. № 4. С. 681-689.
6. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 252с.
7. Арутюнян Р.А. Высокотемпературное охрупчивание и длительная прочность металлических материалов // Механика твердого тела. 2015. № 2. С. 96-104.
8. Ratcliffe R.T., Greenwood G.W. Mechanism of cavitation in magnesium during creep // Phil. Mag. 1965. vol. 12. P. 59-69.
9. Boethner R.C., Robertson W.D. A study of the growth of voids in copper during the creep process by measurement of the accompanying change in density // Trans. of the Metallurg. Society of AIME. 1961. vol. 221. N 3. P. 613-622.
10. Beghi C., Geel C., Piatti G. Density measurements after tensile and creep tests on pure and slightly oxidised aluminium // J. Mat. Sci. 1970. vol. 5. N 4. P. 331-334.
11. Bratke L. Macroscopic measurements of creep damage in metals // Scand. J. Metal. 1978. vol. 7. N 5. P. 199-203.
12. Woodford D.A. Density changes during creep in nickel // Metal science journal. 1969. vol. 3. N 11. P. 234-240.
13. Bowering P., Davies P.W., Wilshire B. The strain dependence of density changes during creep // Metal science journal. 1968. vol. 2. N 9. P. 168-171.
14. Куманин В.И., Ковалева Л.А., Алексеева С.В. Долговечность металла в условиях ползучести. М.: Металлургия, 1988. 223с.

Сведения об авторе:

Арутюнян Роберт Ашотович – д. ф.-м. н., профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д.28; **тел.:** + 7 (812) 4284164 (раб.), **E-mail:** r.arutyunyan@spbu.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ СТЕРЖНЯ С ЗАДАНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Барсегян В.Р.

Ключевые слова: уравнение колебания стержня, оптимальное граничное управление, управление колебаниями, управление с промежуточными состояниями.

Keywords: the equation of bar vibration, optimal boundary control, vibration control, control of intermediate state.

Barseghyan V.R.

On a Problem of Boundary Control of the Bar Vibration with Given States at the Intermediate Moments of Time

Abstract. The problem of boundary control for the equations of transverse vibrations of a bar with given states at the intermediate moments of time is studied, in particular, at certain moments of time only either the value of deflection or velocity, or both values for the points of the bar might be given. The problem is reduced to the problem with zero boundary conditions and by the method of separation of variables, for an arbitrary number of first harmonics the control action is built. As an application of the proposed approach, the control action is built for the control of vibrations of the bar with given deflection of points at some intermediate moment of time.

Аннотация Исследуется задача оптимального граничного управления для уравнения поперечных колебаний стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени, в частности, в некоторые моменты времени могут быть заданы только или значения прогиба или скорости или одновременно оба значения точек стержня. Задача сводится к задаче с нулевыми граничными условиями и методом разделения переменных для произвольных чисел первых гармоник построено оптимальное управляющее воздействие.

Введение. На практике часто возникают задачи граничного управления колебаниями стержня, когда нужно сгенерировать желаемую форму колебания, обеспечить выполнение заданных состояний в промежуточные моменты времени, стабилизировать колебания или полностью успокоить колебания. Многочисленные задачи управления колебательных процессов, как внешними, так и граничными управляющими воздействиями, рассмотрены в работах [1-9] и предложены различные методы решения задач управления. В этих работах исследованы задачи управления упругими колебаниями, с помощью внешних и граничных управлений при различных типах граничных условий. В [4] рассматриваются задачи управления упругими колебаниями, описываемые одномерным волновым уравнением, и приведены способы построения граничных управлений. Работа [5] (и другие работы этих авторов) посвящена проблеме граничного управления (оптимального управления) волновыми процессами в классе обобщённых решений и получены граничные управления. В работах [6, 7] рассмотрены задачи об оптимальном управлении колебаниями струны и мембраны с заданными промежуточными состояниями с помощью внешних сил, действующих на системы. В работе [8] методом Фурье решены задачи оптимального граничного управления колебаниями упругих систем, описываемых волновым уравнением. В работе [9] исследуется задача граничного управления для уравнения поперечных колебаний стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. В работах [11, 12] рассматривается граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени колебания струны и строится решение задачи.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального граничного управления для уравнения поперечных колебаний стержня с заданными значениями функции прогиба и скорости точек стержня в промежуточные моменты времени, в частности, могут быть заданы только или значения прогиба, или скорости точек стержня. Задача сводится к задаче с нулевыми граничными условиями, и используя метод разделения переменных для произвольных чисел первых гармоник, предлагается способ построения оптимального управляющего воздействия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородный, упругий стержень длины l , который занимает в равновесном горизонтальном положении отрезок $[0, l]$ по оси симметрии Ox . Обозначим через ρ и E линейную плотность и модуль упругости материала стержня, через S и J – площадь поперечного сечения и момент инерции сечения стержня относительно своей горизонтальной оси. Пусть состояние колебательной системы (малые поперечные колебания стержня), т.е. отклонения от положения равновесия точки x оси стержня в момент времени t , описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4} = 0 \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$Q(0, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

где функция $u(t)$ – граничное управление, которое дважды непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет некоторым условиям согласования (которые приведены в разделе 2). В уравнении (1.1) принято обозначение $a^2 = \frac{EJ}{\rho S}$.

Совокупность всех функций $Q(x, t)$, удовлетворяющих уравнению (1.1) дважды непрерывно дифференцируемым по t ($0 \leq t \leq T$) и четырежды непрерывно дифференцируемым по x вплоть до границы области ($0 < x < l$).

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения функции прогиба и скорости точки стержня. Может быть, что в некоторый момент времени задана функция прогиба, а в следующий момент времени только скорость прогиба, а в третий момент времени заданы одновременно значения прогиба и скорости точек стержня. В частности, предположим, что в промежуточные

моменты времени t_i ($i=1, \dots, m$) значения прогиба и скорости точек стержня могут быть заданы в следующем виде:

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.5)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \psi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.6)$$

Задача оптимального граничного управления колебаниями стержня с заданными значениями в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных управлений $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ требуется найти оптимальное управление, переводящее колебания стержня (1.1) из заданного начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.5), (1.6) (или в некоторые моменты времени t_i ($i=1, \dots, m$) может быть задано только одно из них или одновременно оба условия) в конечное состояние

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.7)$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T u^2(t) dt \quad (1.8)$$

Предположим, что заданные функции $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ ($i=0, 1, \dots, m, m+1$) имеют до 4-ого порядка непрерывные производные.

Отметим, что поставленная задача в тех случаях, когда в отдельные промежуточные моменты времени, считается заданным только одно из условий (1.5) или (1.6), или когда одновременно заданы оба эти условия (1.5), (1.6), различаются физическими интерпретациями, следовательно, их можно рассматривать как разные задачи.

Использовать подход поэтапного решения для рассмотренной задачи оптимального управления нецелесообразно, т.к. его невозможно применить, в частности, в тех случаях, когда в отдельные промежуточные моменты времени заданы только или значения прогиба (1.5), или скорости (1.6) точек стержня. Поэтому, в работе предлагается такой подход: решения рассмотренной задачи управления, в котором можно учитывать специфику возможных промежуточных условий.

Не нарушая общности, в работе решение задачи строится, считая, что в промежуточные моменты времени заданы оба условия (1.5) и (1.6). В тех случаях, когда в некоторые моменты времени одно из этих условий не будет заданным, соответствующие соотношения просто не будут участвовать (или исключим).

2. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Так как граничные смещения (1.3) неоднородны, решение рассмотренной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями [9, 13].

Решение уравнения (1.1) ищем в виде суммы

$$Q(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \quad (2.1)$$

где $V(x, t)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению (1.1) с однородными граничными условиями:

$$V(0, t) = V(l, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (2.2)$$

а $W(x, t)$ – решение уравнения (1.1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0, t) = u(t), \quad W(l, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (2.3)$$

В этом случае функция $W(x, t)$ имеет вид:

$$W(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u(t). \quad (2.4)$$

Подставив (2.1) в (1.1) и учитывая (2.4), получим:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = F(x, t), \quad (2.5)$$

где

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right)u''(t). \quad (2.6)$$

В силу начальных, промежуточных и конечных условий соответственно (1.2), (1.5)- (1.7) функция $V(x, t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)u(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)u'(0) \quad (2.7)$$

промежуточным условиям

$$V(x, t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)u(t_i), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \psi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)u'(t_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.8)$$

и конечным условиям

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)u(T), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)u'(T). \quad (2.9)$$

Из условия (2.2) следует

$$V(0, t_i) = V(l, t_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, m+1,$$

$$\left. \frac{\partial V(0, t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \left. \frac{\partial V(l, t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, m+1, \quad (2.10)$$

$$V_{xx}(0, t_i) = V_{xx}(l, t_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m, m+1.$$

Из условий (2.7), (2.8) и (2.9) с учётом (2.10) получим следующие условия согласования:

$$u(0) = \varphi_0(0), \quad u'(0) = \psi_0(0), \quad (2.11)$$

$$u(t_i) = \varphi_i(0), \quad u'(t_i) = \psi_i(0) \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

$$u(T) = \varphi_T(0), \quad u'(T) = \psi_T(0). \quad (2.13)$$

Таким образом, с учётом условий (2.11)-(2.13), условия (2.7)-(2.9) запишутся следующим образом, соответственно:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\varphi_0(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\psi_0(0), \quad (2.14)$$

$$V(x, t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\varphi_i(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=t_i} = \psi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\psi_i(0), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.15)$$

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\varphi_T(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right)\psi_T(0). \quad (2.16)$$

Таким образом, задача оптимального граничного управления колебаниями стержня приведена к задаче управления (2.5) с граничными условиями (2.2) и минимизирующий функционал (1.8), которая формулируется следующим образом: требуется найти оптимальное граничное управление $u^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, переводящее движение (2.5) с граничными условиями (2.2) из заданного начального состояния (2.14) через промежуточные состояния (2.15) в конечное состояние (2.16) и минимизирующий функционал (1.8).

3. Сведение решения задачи к проблеме моментов. Решение уравнения (2.5) ищем в виде

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad \text{где} \quad V_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l V(x, t) \sin \frac{\pi k}{l} x dx. \quad (3.1)$$

Представим функции $F(x, t)$, $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$) в виде рядов Фурье и подставив их значения вместе с значением $V(x, t)$ из (3.1) в уравнения (2.5), (2.6) и в условия (2.14)-(2.16), получим:

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = a^2 \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4, \quad (3.2)$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_0(0), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_0(0), \quad (3.3)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_i(0), \quad \dot{V}_k(t_i) = \psi_k^{(i)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_i(0) \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_T(0), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_T(0), \quad (3.5)$$

где

$$F_k(t) = -\frac{2a}{\lambda_k l} u''(t). \quad (3.6)$$

Здесь через $\varphi_k^{(i)}, \psi_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, m, m+1$) обозначены коэффициенты Фурье, соответственно, функциям $\varphi_i(x), \psi_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, m, m+1$), т. е.

$$\varphi_k^{(i)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_i(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad \psi_k^{(i)} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_i(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad (i = 0, 1, \dots, m, m+1).$$

Общее решение уравнения (3.2) с начальными условиями (3.3) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Теперь учитывая промежуточные (3.4) и конечные (3.5) условия, из (3.7) получим, что функции $F_k(\tau)$ должны удовлетворять следующей бесконечной системе равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_j} F_k(\tau) \sin \lambda_k(t_j - \tau) d\tau &= \lambda_k V_k(t_j) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_j, \\ \int_0^{t_j} F_k(\tau) \cos \lambda_k(t_j - \tau) d\tau &= \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t_j, \\ j &= 1, \dots, m, m+1. \end{aligned}$$

Эти равенства целесообразно представить в виде

$$\int_0^{t_j} F_k(\tau) \sin \lambda_k \tau d\tau = \tilde{C}_{1k}(t_j), \quad \int_0^{t_j} F_k(\tau) \cos \lambda_k \tau d\tau = \tilde{C}_{2k}(t_j), \quad j = 1, \dots, m, m+1, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}(t_j) &= \lambda_k V_k(0) - \lambda_k V_k(t_j) \cos \lambda_k t_j + \dot{V}_k(t_j) \sin \lambda_k t_j, \\ \tilde{C}_{2k}(t_j) &= -\dot{V}_k(0) + \dot{V}_k(t_j) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k V_k(t_j) \sin \lambda_k t_j. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (3.6) в (3.8) и интегрируя по частям с учётом условий (2.11)-(2.13), получим:

$$\int_0^{t_i} u(t) \sin \lambda_k t dt = C_{1k}(t_i), \quad \int_0^{t_i} u(t) \cos \lambda_k t dt = C_{2k}(t_i), \quad i = 1, \dots, m, m+1, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}(t_i) &= \frac{l}{2a\lambda_k} \tilde{C}_{1k}(t_i) + \frac{\psi_i(0)}{\lambda_k^2} \sin \lambda_k t_i - \frac{\varphi_i(0)}{\lambda_k} \cos \lambda_k t_i + \frac{\varphi_0(0)}{\lambda_k}, \\ C_{2k}(t_i) &= \frac{l}{2a\lambda_k} \tilde{C}_{2k}(t_i) + \frac{\psi_i(0)}{\lambda_k^2} \cos \lambda_k t_i + \frac{\varphi_i(0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k t_i - \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для того, чтобы левую часть системы (3.10) для каждого $k = 1, 2, \dots$ рассматривать как линейную операцию, порождённую функцией $u(t)$ на отрезке времени $[0, T]$, целесообразно ввести следующие функции:

$$h_{1k}^{(i)}(t) = \begin{cases} \sin \lambda_k t, & \text{при } 0 \leq t \leq t_i \\ 0, & \text{при } t_i < t \leq T \end{cases}, \quad (3.12)$$

$$h_{2k}^{(i)}(t) = \begin{cases} \cos \lambda_k t, & \text{при } 0 \leq t \leq t_i \\ 0, & \text{при } t_i < t \leq T \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m+1). \quad (3.13)$$

Соотношения (3.10) при помощи функции $h_{1k}^{(i)}(t)$ (3.12) и $h_{2k}^{(i)}(t)$ (3.13) запишутся так:

$$\int_0^T h_{1k}^{(i)}(t)u(t)dt = C_{1k}(t_i), \int_0^T h_{2k}^{(i)}(t)u(t)dt = C_{2k}(t_i), i = 1, \dots, m+1; k = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению такого управления $u(t)$ $0 \leq t \leq T$, которое удовлетворяет интегральным соотношениям (3.14) и доставляет минимум функционалу (1.8). Так как функционал (1.8) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, то задачу определения оптимального управления можно рассматривать как проблему моментов [1, 14], следовательно, и решение можно построить соответствующим образом.

На практике обычно выбираются несколько первых гармоник упругих колебаний и решается задача, используя методы теории управления конечномерными системами.

4. Решение задачи в случае $m = 1$. Для простоты изложения решение задачи (3.14), (1.8) предположим, что состояние и скорость точек стержня заданы в одном промежуточном моменте времени, т.е. $0 < t_1 < t_2 = T$ (или $m = 1$). Тогда, из (3.14) имеем следующие интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^T h_{1k}^{(1)}(t)u(t)dt &= C_{1k}(t_1), \quad \int_0^T h_{1k}^{(2)}(t)u(t)dt = C_{1k}(t_2), \\ \int_0^T h_{2k}^{(1)}(t)u(t)dt &= C_{2k}(t_1), \quad \int_0^T h_{2k}^{(2)}(t)u(t)dt = C_{2k}(t_2) \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Чтобы решить полученную бесконечномерную вариационную задачу условного экстремума (4.1), (1.8), следуя [1], достаточно построить решение этой задачи для произвольного $n = 1, 2, \dots$, как конечномерная проблема моментов [1, 14].

Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов, нужно найти величины $p_{1k}, q_{1k}, p_{2k}, q_{2k}, k = 1, \dots, n$, связанные с условием

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 [p_{ik}C_{1k}(t_i) + q_{ik}C_{2k}(t_i)] = 1, \quad (4.2)$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(4.2)} \int_0^T h_n^2(t) dt, \quad (4.3)$$

где

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 \left[p_{ik} h_{1k}^{(i)}(t) + q_{ik} h_{2k}^{(i)}(t) \right]. \quad (4.4)$$

Для определения величины $p_{1k}^0, q_{1k}^0, p_{2k}^0, q_{2k}^0, k=1, \dots, n$ минимизирующие (4.3), применим метод неопределённых множителей Лагранжа. Введём функцию

$$f(p, q) = \int_0^T \left[\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 \left(p_{ik} h_{1k}^{(i)}(t) + q_{ik} h_{2k}^{(i)}(t) \right) \right]^2 dt + \\ + \beta \left[\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 \left(p_{ik} C_{1k}(t_i) + q_{ik} C_{2k}(t_i) \right) - 1 \right],$$

где $p = \{p_{11}, p_{21}, \dots, p_{1n}, p_{2n}\}$, $q = \{q_{11}, q_{21}, \dots, q_{1n}, q_{2n}\}$, β – неопределённый множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по $p_{1k}, q_{1k}, p_{2k}, q_{2k}, k=1, \dots, n$ функции $f(p, q)$, и, приравнявая к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \left(a_{ks}^{(1)} p_{1k} + b_{ks}^{(1)} q_{1k} + a_{ks}^{(1)} p_{2k} + b_{ks}^{(1)} q_{2k} \right) = -\frac{\beta}{2} C_{1s}(t_1), \\ \sum_{k=1}^n \left(c_{ks}^{(1)} p_{1k} + d_{ks}^{(1)} q_{1k} + c_{ks}^{(1)} p_{2k} + d_{ks}^{(1)} q_{2k} \right) = -\frac{\beta}{2} C_{2s}(t_1), \\ \sum_{k=1}^n \left(a_{ks}^{(1)} p_{1k} + b_{ks}^{(1)} q_{1k} + a_{ks}^{(2)} p_{2k} + b_{ks}^{(2)} q_{2k} \right) = -\frac{\beta}{2} C_{1s}(t_2), \\ \sum_{k=1}^n \left(c_{ks}^{(1)} p_{1k} + d_{ks}^{(1)} q_{1k} + c_{ks}^{(2)} p_{2k} + d_{ks}^{(2)} q_{2k} \right) = -\frac{\beta}{2} C_{2s}(t_2), \quad s=1, \dots, n, \quad (4.5)$$

где с учётом обозначений (3.12) и (3.13), приняты следующие обозначения:

$$a_{ks}^{(1)} = \int_0^T h_{1k}^{(1)}(t) h_{1s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{1k}^{(2)}(t) h_{1s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{1k}^{(1)}(t) h_{1s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_1} \sin \lambda_k t \sin \lambda_s t dt, \\ b_{ks}^{(1)} = \int_0^T h_{2k}^{(1)}(t) h_{1s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{2k}^{(2)}(t) h_{1s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{2k}^{(1)}(t) h_{1s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_1} \cos \lambda_k t \sin \lambda_s t dt,$$

$$\begin{aligned}
c_{ks}^{(1)} &= \int_0^T h_{1k}^{(1)}(t) h_{2s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{1k}^{(2)}(t) h_{2s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{1k}^{(1)}(t) h_{2s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_i} \sin \lambda_k t \cos \lambda_s t dt, \\
d_{ks}^{(1)} &= \int_0^T h_{2k}^{(1)}(t) h_{2s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{2k}^{(2)}(t) h_{2s}^{(1)}(t) dt = \int_0^T h_{2k}^{(1)}(t) h_{2s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_i} \cos \lambda_k t \cos \lambda_s t dt, \\
a_{ks}^{(2)} &= \int_0^T h_{1k}^{(2)}(t) h_{1s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_2} \sin \lambda_k t \sin \lambda_s t dt, \\
b_{ks}^{(2)} &= \int_0^T h_{2k}^{(2)}(t) h_{1s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_2} \cos \lambda_k t \sin \lambda_s t dt, \\
c_{ks}^{(2)} &= \int_0^T h_{1k}^{(2)}(t) h_{2s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_2} \sin \lambda_k t \cos \lambda_s t dt, \\
d_{ks}^{(2)} &= \int_0^T h_{2k}^{(2)}(t) h_{2s}^{(2)}(t) dt = \int_0^{t_2} \cos \lambda_k t \cos \lambda_s t dt.
\end{aligned}$$

Вычисляя приведённые интегралы, получим:

$$\begin{aligned}
a_{ks}^{(i)} &= \int_0^{t_i} \sin \lambda_k t \sin \lambda_s t dt = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2} [\lambda_s \sin \lambda_k t_i \cos \lambda_s t_i - \lambda_k \sin \lambda_s t_i \cos \lambda_k t_i] \\ \text{при } \lambda_k \neq \lambda_s \ (k \neq s) \\ \frac{t_i}{2} - \frac{\sin 2\lambda_k t_i}{4\lambda_k} \text{ при } \lambda_k = \lambda_s \ (k = s) \end{cases}, \\
b_{ks}^{(i)} &= \int_0^{t_i} \cos \lambda_k t \sin \lambda_s t dt = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2} [\lambda_k \sin \lambda_k t_i \sin \lambda_s t_i + \lambda_s \cos \lambda_k t_i \cos \lambda_s t_i - \lambda_s] \\ \text{при } \lambda_k \neq \lambda_s \ (k \neq s) \\ \frac{\sin^2 \lambda_k t_i}{2\lambda_k} \text{ при } \lambda_k = \lambda_s \ (k = s) \end{cases}, \\
c_{ks}^{(i)} &= \int_0^{t_i} \sin \lambda_k t \cos \lambda_s t dt = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2} [\lambda_k - \lambda_s \sin \lambda_k t_i \sin \lambda_s t_i - \lambda_k \cos \lambda_k t_i \cos \lambda_s t_i] \\ \text{при } \lambda_k \neq \lambda_s \ (k \neq s) \\ \frac{\sin^2 \lambda_k t_i}{2\lambda_k} \text{ при } \lambda_k = \lambda_s \ (k = s) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$d_{ks}^{(i)} = \int_0^{t_i} \cos \lambda_k t \cos \lambda_s t dt = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k^2 - \lambda_s^2} [\lambda_k \sin \lambda_k t_i \cos \lambda_s t_i - \lambda_s \sin \lambda_s t_i \cos \lambda_k t_i] \\ \text{при } \lambda_k \neq \lambda_s \ (k \neq s) \\ \frac{t_i}{2} + \frac{\sin 2\lambda_k t_i}{4\lambda_k} \text{ при } \lambda_k = \lambda_s \ (k = s) \end{cases}$$

где $k, s = 1, \dots, n$; $i = 1, 2$.

Присоединяя к уравнениям (4.5) условие (4.2), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $p_{1k}, q_{1k}, p_{2k}, q_{2k}$, $k = 1, \dots, n$ и β .

Обозначим главный определитель системы (4.5) через Δ_n и предположим, что $\Delta_n \neq 0$, а через $\bar{\Delta}_n(p_{1k}), \bar{\Delta}_n(q_{1k}), \bar{\Delta}_n(p_{2k}), \bar{\Delta}_n(q_{2k})$ определители, которые получены из Δ_n , заменяя соответствующий столбец в правой части системы (4.5).

Тогда решение системы (4.5) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} p_{1k}^0 &= \frac{\Delta_n(p_{1k})}{A_n}, \quad q_{1k}^0 = \frac{\Delta_n(q_{1k})}{A_n}, \quad p_{2k}^0 = \frac{\Delta_n(p_{2k})}{A_n}, \\ q_{2k}^0 &= \frac{\Delta_n(q_{2k})}{A_n}, \quad \beta = -2 \frac{\Delta_n}{A_n}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n [\Delta_n(p_{1k})C_{1k}(t_1) + \Delta_n(q_{1k})C_{2k}(t_1) + \Delta_n(p_{2k})C_{1k}(t_2) + \Delta_n(q_{2k})C_{2k}(t_2)], \\ \Delta_n(p_{1k}) &= -\frac{2}{\beta} \bar{\Delta}_n(p_{1k}), \quad \Delta_n(q_{1k}) = -\frac{2}{\beta} \bar{\Delta}_n(q_{1k}), \\ \Delta_n(p_{2k}) &= -\frac{2}{\beta} \bar{\Delta}_n(p_{2k}), \quad \Delta_n(q_{2k}) = -\frac{2}{\beta} \bar{\Delta}_n(q_{2k}), \end{aligned}$$

Подставляя из (4.6) значения для $p_{1k}^0, q_{1k}^0, p_{2k}^0, q_{2k}^0$ в (4.4), получим

$$h_n^0(t) = \frac{\tilde{h}_n^0(t)}{A_n}, \quad (4.7)$$

где

$$\tilde{h}_n^0(t) = \sum_{k=1}^n [\Delta_n(p_{1k})h_{1k}^{(1)}(t) + \Delta_n(q_{1k})h_{2k}^{(2)}(t) + \Delta_n(p_{2k})h_{1k}^{(2)}(t) + \Delta_n(q_{2k})h_{2k}^{(1)}(t)].$$

Из (4.3) с учётом (4.7) будем иметь

$$(\rho_n^0)^2 = \frac{B_n}{A_n^2}, \text{ где } B_n = \int_0^T (\tilde{h}_n^0(t))^2 dt.$$

Таким образом, искомое оптимальное управление определяется выражением [14]:

$$u_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(t) = \frac{A_n}{B_n} \tilde{h}_n^0(t). \quad (4.8)$$

Учитывая (3.12) и (3.13), оптимальное управляющее воздействие (4.8) имеет следующий вид:

$$u_n^0(t) = \begin{cases} \frac{A_n}{B_n} \tilde{h}_n^{0-}(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{A_n}{B_n} \tilde{h}_n^{0+}(t) & \text{при } t_1 < t \leq t_2 \end{cases}, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n^{0-}(t) &= \sum_{k=1}^n [(\Delta_n(p_{1k}) + \Delta_n(p_{2k})) \sin \lambda_k t + (\Delta_n(q_{1k}) + \Delta_n(q_{2k})) \cos \lambda_k t], \\ \tilde{h}_n^{0+}(t) &= \sum_{k=1}^n [\Delta_n(p_{2k}) \sin \lambda_k t + \Delta_n(q_{2k}) \cos \lambda_k t]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом, имея функцию оптимального управления (4.9) из формулы (3.6), (3.7) можно найти функцию $V_k(t)$, следовательно, и функцию прогиба стержня.

Заключение. Задача оптимального граничного управления для уравнения колебания стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени сводится к задаче с нулевыми граничными условиями, и методом разделения переменных для произвольных чисел первых гармоник предложен способ построения оптимального граничного управляющего воздействия, используя методы теории управления конечномерными системами. Такой подход позволяет построить решения задачи оптимального граничного управления и для тех случаях, когда в отдельные промежуточные моменты времени, заданы только или значения прогиба или скорости точек стержня или одновременно оба условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
3. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Наука, 1986. 216 с.
4. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
5. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. //Успехи математических наук. 2005. Т. 60. Вып. 6 (366). С. 89-114.
6. Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с

- заданными состояниями в промежуточные моменты времени. //Известия НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. № 2. С. 52 – 60.
7. Барсегян В.Р. Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях. Уч. записки ЕГУ. 1998. №1(188). с.24-29.
 8. Barseghyan V.R. and Movsisyan L.A. Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation. International Applied Mechanics, Vol. 48, No. 2, 2012, pp. 234-239.
 9. Барсегян В.Р. Об одной задаче граничного управления колебаниями стержня с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. Актуальные проблемы механики сплошной среды. /Труды IV международной конференции. 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения, с.76-80.
 10. Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16), с. 5-10.
 11. Корзюк В.И., Козловская И.С., Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I./Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. т. 18, № 2, с. 22–35.
 12. Корзюк В.И., Козловская И.С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. /Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. т. 19, № 1, с. 62–70.
 13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: 1977, 736 с.
 14. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Сведения об авторе:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.

Тел.: (+374 91) 20 32 20

E-mail: barseghyan@sci.am

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ СОСТАВНОЙ СВОБОДНО ОПЁРТОЙ ПЛАСТИНКИ

Белубекян В.М., Терзян С.А.

Ключевые слова: секториальная пластина, изгиб, концентрация напряжений.
Key words: sectorial plate, bending, stress concentration

Belubekyan V.M., Terzyan S.A.

Stress concentration at angular point of compound simply supported plate

Abstract. The problem of the bending of a sectorial plate consisting of two sectorial parts with different properties is considered. It is assumed that the radial boundaries, both external and at the junction of the parts, are freely supported. The stress-strain state in the vicinity of the point of intersection of the three supported sides is studied.

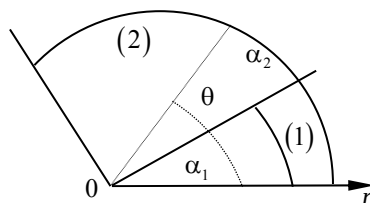
Аннотация. Рассматривается задача изгиба секториальной пластинки, состоящей из двух секториальных частей с различными свойствами. Предполагается, что радиальные границы, как внешние, так и на стыке частей, свободно опёрты. Исследуется напряжённо-деформированное состояние в окрестности точки пересечения трёх опёртых сторон. Приведены численные результаты по установлению условий, появления концентрации напряжений в зависимости от углов секторов, изгибных жёсткостей и коэффициента Пуассона материалов пластин.

Введение. Имеется обширная литература по исследованию напряжённо-деформативного состояния в окрестности вершины составного клина, как для задач антиплоской (кручения), так и для задач плоской деформации [1–5].

Особенности напряжений в угловой точке однородной пластинки при изгибе исследовались в [6–8].

В настоящей работе приводится решение задачи изгиба кусочно-неоднородной тонкой пластинки в окрестности точки пересечения трёх свободно опёртых сторон в одной угловой точке.

1. Секториальная пластина, состоящая из двух частей, в цилиндрической системе координат (r, θ, z) занимает область $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \alpha_2$, $-h \leq z \leq h$. Часть пластинки с индексом (1) имеет угол $0 \leq \theta < \alpha_1$, часть пластинки с индексом (2) – угол $\alpha_1 < \theta \leq \alpha_2$ (фиг.1)



Фиг.1

Уравнения изгиба упругой пластинки для каждой части, в отсутствии поперечной нагрузки, имеют вид:

$$\Delta w_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

где оператор Лапласа в полярной системе (r, θ) известен

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.2)$$

Предполагается, что пластинка по внешним радиусам и по радиусу соединения свободно опёрта

$$w_1 = 0, \quad M_\theta^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad (1.3)$$

$$w_1 = w_2 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \frac{\partial w_2}{\partial \theta}, \quad M_\theta^{(1)} = M_\theta^{(2)} \quad \text{при} \quad \theta = \alpha_1 \quad (1.4)$$

$$w_2 = 0, \quad M_\theta^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha_2. \quad (1.5)$$

2. Решения уравнений (1.1) представляется следующим образом [8.9]:

$$w_i(r, \theta) = r^\lambda f_i(\theta). \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.1) приводит к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$f_i^{IV} + \left[\lambda^2 + (\lambda - 2)^2 \right] f_i'' + \lambda^2 (\lambda - 2)^2 f_i = 0, \quad (2.2)$$

общее решение которого получается в виде

$$f_i(\theta) = A_i \sin \lambda \theta + B_i \cos \lambda \theta + F_i \sin(\lambda - 2)\theta + G_i \cos(\lambda - 2)\theta. \quad (2.3)$$

После удовлетворения граничным условиям (1.3) и (1.5), число произвольных постоянных уменьшается, а для функций $f_i(\theta)$ получается:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= A_1 \sin \lambda \theta + F_1 \sin(\lambda - 2)\theta \\ f_2(\theta) &= A_2 (\sin \lambda \theta - \operatorname{tg} \lambda \alpha_2 \cos \lambda \theta) + \\ &+ F_2 [\sin(\lambda - 2)\theta - \operatorname{tg}(\lambda - 2) \alpha_2 \cos(\lambda - 2)\theta] \end{aligned} \quad (2.4)$$

На границе соединения пластин ($\theta = \alpha_1$) могут быть заданы различные варианты четырёх граничных условий, как условие для определения четырёх произвольных

постоянных A_1, F_1, A_2, F_2 . Здесь рассматривается сравнительно простой вариант свободного опирания. Граничные условия (1.4) подстановкой (2.1) приводятся к условиям относительно функций $f_i(\theta)$:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_1' = f_2', \quad D_1 f_1'' = D_2 f_2'' \quad \text{при } \theta = \alpha_1 \quad (2.5)$$

где D_1, D_2 – изгибные жёсткости пластин.

После удовлетворения первым двум условиям из граничных условий (2.5), получаются новые выражения для функций $f_i(\theta)$:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \left[\sin \lambda \theta - \frac{\sin \lambda \alpha_1}{\sin(\lambda - 2)\alpha_1} \sin(\lambda - 2)\theta \right] A_1 \\ f_2(\theta) &= -\frac{1}{\cos \lambda \alpha_2} \cdot \\ &\cdot \left[\sin \lambda(\alpha_2 - \theta) - \sin \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\sin(\lambda - 2)(\alpha_2 - \theta)}{\sin(\lambda - 2)(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] A_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Требование, чтобы решения (2.6) удовлетворяли третьему и четвёртому условиям из (2.5), приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2 :

$$\begin{aligned} &\cos \lambda \alpha_1 \left[\lambda \cos 2\alpha_1 - (\lambda - 2) \frac{\sin \lambda \alpha_1}{\sin(\lambda - 2)\alpha_1} \cos(\lambda - 2)\alpha_1 \right] A_1 + \\ &+ \left[-\lambda \cos \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) + (\lambda - 2) \sin \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\cos(\lambda - 2)(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\lambda - 2)(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] A_2 = 0 \quad (2.7) \\ &\gamma A_1 \sin \lambda \alpha_1 \cos \lambda \alpha_1 + A_2 \sin \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) = 0, \quad \gamma = D_1/D_2. \end{aligned}$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.7) даёт уравнение, определяющее параметр λ , характеризующее наличие или отсутствие особенности в угловой точке пластины.

$$R(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) \cos \lambda \alpha_1 = 0, \quad (2.8)$$

где

$$R(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) = \lambda \operatorname{ctg} \lambda \alpha_1 - (\lambda - 2) \operatorname{ctg} (\lambda - 2) \alpha_1 + \\ + \gamma [\lambda \operatorname{ctg} \lambda (\alpha_2 - \alpha_1) - (\lambda - 2) \operatorname{ctg} (\lambda - 2) (\alpha_2 - \alpha_1)] \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) имеет для λ две группы решений:

$$\cos \lambda_1 \alpha_1 = 0, \quad R(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \gamma) = 0 \quad (2.10)$$

Из первого уравнения получается

$$\lambda_n = (2n - 1) \pi / (2\alpha_1), \quad (2.11)$$

откуда следует, что концентрация появляется при $\alpha_1 > \pi/2$ ($\lambda < 1$).

Частные решения уравнения $R = 0$ (напр., $\alpha_2 = 2\alpha_1$ или $\gamma = 0$, или $\gamma = \infty$), а также численные результаты показывают, что для этого уравнения нет решений, удовлетворяющих условию появления концентрации $\lambda < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension. // Journ. Appl. Mech. 1952, 19, p.526-528.
2. Чобанян К.С. Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. // Изв. АН Арм ССР, серия физ.-мат. ест. и техн. наук. 1955. Т.VIII. №2. С.17-30.
3. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. // Journ. of Elasticity. 1979. V.9. №4. P.373-391.
4. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987. 338с.
5. Саргсян А.М. Влияние типа электрических граничных условий на поведение напряжений в точке кусочно-однородного пьезоэлектрического клина. // Механика композитных материалов. 2015. Т.51. №2. С.309-322.
6. Williams M.L. Surface stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plate under Bending. Proceedings of the first U.S. National Congress of Applied Mechanics. 1951, 19, p.325-329.

7. Burton W.S., Sinclair G.B. On the Singularities in Reissner's Theory for the Bending of Elastic Plates. Transactions of the ASME, // Journal of Applied Mechanics. 1986. V.53. P.220-222.
8. Белубекян В.М. Об особенностях решений в задаче изгиба ортотропной секториальной пластинки. // Межвуз. Сборник, Механика, Ереван: Изд-во ЕГУ, 1991. №8. С.231-238.
9. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.

Сведения об авторах:

Белубекян Вагаршак Мелсович – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении.
E-mail: vbelub@gmail.com

Терзян Саркис Арутюнович – к.ф.м.н., н.с. Института механики НАН Армении.
Тел.: (+374 91) 340432. **E-mail:** sat_and_21@yahoo.com

УСЛОВИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАСТЯНУТОЙ ПЛАСТИНКИ

Белубекян М.В.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, изгибные колебания, локализация
Keywords: rectangular plate, bending vibrations, localization

Belubekyan M.V.

Localized bending vibrations appearance conditions of the plate under tension

Abstract. The rectangular plate vibration problem with the two opposite freely supported edges, one free edge and fourth edge in the cases of different boundary conditions is considered. The conditions of the localized vibrations existence in the vicinity of the free edge are established.

Аннотация: Рассматривается задача колебаний прямоугольной пластинки с двумя противоположными свободно опертыми краями с одним свободным и четвёртым краем при различных вариантах закрепления. Установлены условия появления локализованных изгибных колебаний в окрестности свободного края пластинки в зависимости от относительного размера и физических свойств материала пластинки.

Введение. В 1960 году Коненковым [1] была показана возможность существования изгибных колебаний для полубесконечных пластин с частотами меньших частот колебаний по форме цилиндрической поверхности. Амплитуды этих колебаний экспоненциально уменьшаются при удалении по нормали от свободного края, аналогично поверхностным волнам Рэлея. В дальнейшем, локализованным изгибным колебаниям были посвящены много работ, обзор которых приводится в монографии [2] и статьях [3-5].

В настоящей статье ставится вопрос, когда для пластины конечных размеров появляются частоты, которые меньше частот колебаний по форме цилиндрической поверхности, короче, когда появляются локализованные колебания (ЛК).

1. Постановка задачи. Пластинка в прямоугольной координатной системе (x, y, z) занимает область $0 \leq x \leq a, -h \leq z \leq h$

Пластинка равномерно растянута по направлению координаты y . Уравнение колебаний пластинки имеет вид [6]

$$D\Delta^2 w - P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

где w – функция прогиба, P – растягивающая нагрузка, приложенная к краям $y = 0, y = b$, ρ – плотность, D – изгибная жёсткость

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

Полагается, что две противоположные края пластинки свободно оперты и один край свободен

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.4)$$

Для условий закрепления края пластинки $x = a$, в дальнейшем, будут рассмотрены различные варианты.

Решения уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), представляются в виде

$$w = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi / b \quad (1.5)$$

Подстановка (1.5) в (1.1) приводит к последовательным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно $f_n(x)$

$$f_n'' - 2\lambda_n^2 f_n' + \lambda_n^4 (1 + \alpha_n^2 - \beta_n^2) f_n = 0 \quad (1.6)$$

где

$$\alpha_n^2 = \frac{P}{D\lambda_n^2}, \quad \beta_n^2 = \frac{2\rho h\omega^2}{D\lambda_n^4} \quad (1.7)$$

Общее решение уравнения (1.7) есть

$$f_n(x) = A_n \operatorname{sh} \lambda_n p_1 x + D_n \operatorname{ch} \lambda_n p_1 x + A_n \operatorname{sh} \lambda_n p_2 x + B_n \operatorname{ch} \lambda_n p_2 x \quad (1.8)$$

В (1.8) p_1, p_2 есть корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \left[1 \pm \sqrt{\beta_n^2 - \alpha_n^2} \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

Для существования локализованных колебаний необходимо, чтобы выполнялось условие $p_2 > 0$ или

$$0 < \beta_n^2 < 1 + \alpha_n^2 \quad (1.10)$$

В частном случае отсутствия нагрузки ($\alpha_n^2 = 0$), условие (1.10) есть условие задачи Коненкова [1].

Требуя, чтобы решение (1.5), с учётом (1.9) удовлетворяло граничным условиям свободного края (1.4), даёт для $f_n(x)$ новое выражение с двумя произвольными постоянными A_n, B_n

$$f_n(x) = \left[-\frac{p_2(p_2^2 - 2 + \nu)}{p_1(p_1^2 - 2 + \nu)} \operatorname{sh} \lambda_n p_1 x + \operatorname{sh} \lambda_n p_2 x \right] A_n + \\ + \left[-\frac{p_2^2 - \nu}{p_1^2 - \nu} \operatorname{ch} \lambda_n p_1 x + \operatorname{ch} \lambda_n p_2 x \right] B_n \quad (1.11)$$

2. Четвёртая сторона пластики жёстко закреплена. Прежде всего рассматривается вариант, когда оставшаяся четвёртая сторона пластики жёстко закреплена

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \quad (2.1)$$

Подстановка решения (1.1), с учётом (1.11) в граничные условия (2.1) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n . Из условия равенства нулю детерминанта полученной системы следует дисперсионное уравнение:

$$\left[\frac{p_2(p_2^2 - 2 + v)}{p_1(p_1^2 - 2 + v)} + \frac{p_1(p_2^2 - v)}{p_2(p_1^2 - v)} \right] \text{sh} \zeta_1 \text{sh} \zeta_2 - \left(\frac{p_2^2 - 2 + v}{p_1^2 - 2 + v} + \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \right) \text{ch} \zeta_1 \text{ch} \zeta_2 + \frac{(p_2^2 - v)(p_2^2 - 2 + v)}{(p_1^2 - v)(p_1^2 - 2 + v)} + 1 = 0 \quad (2.2)$$

где

$$\zeta_i = \lambda_n a p_i \quad (2.3)$$

Отсюда в пределе $\zeta_1 \rightarrow \infty, \zeta_2 \rightarrow \infty$ после некоторых преобразований [7] получается уравнение задачи Коненкова для полубесконечной полосы

$$p_1^2 p_2^2 + 2(1 - v) p_1 p_2 - v^2 = 0 \quad (2.4)$$

Локализованные колебания существуют, если уравнение (2.2) имеет решение (β_n) , удовлетворяющее условию (1.10).

Граница разделения локализованных колебаний от периодических есть $\beta_n^2 = 1 + \alpha_n^2 (p_2 = 0)$. Требуя, чтобы $p_2 = 0$ удовлетворяло уравнению (2.2), приводит к уравнению относительно $\lambda_n a$

$$\frac{\sqrt{2v}}{2 - v} \lambda_n a \text{sh}(\sqrt{2\lambda_n a}) - \frac{(2 - v)^2 + v^2}{v(2 - v)} \text{ch}(\sqrt{2\lambda_n a}) = 0 \quad (2.5)$$

Если обозначить корень уравнения (2.5) через $(\lambda_n a)_*$, то очевидно, что решение, удовлетворяющее условию (1.10), будет иметь место при

$$\lambda_n a > (\lambda_n a)_* \quad (2.6)$$

Имея в виду, что уравнение (2.5) имеет корень $(\lambda_n a)_*$ достаточно большой, можно из уравнения получить простую формулу

$$\lambda_n a \geq \frac{(2 - v)^2 + v^2}{\sqrt{2v}} \quad (2.7)$$

3. Четвёртая сторона пластики шарнирно закреплена. Пусть на четвёртой границе пластинки заданы условия шарнирного закрепления

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a \quad (3.1)$$

Требуя, чтобы решение (1.1), с учётом (1.11) удовлетворяло условиям (3.1), как и в предыдущем случае, приводило к системе уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n . Условие равенства нулю детерминанта указанной системы даёт

$$\frac{p_2(p_2^2 - 2 + \nu)}{p_1(p_1^2 - 2 + \nu)} \operatorname{th} \zeta_1 - \frac{p_2^2 - \nu}{p_1^2 - \nu} \operatorname{th} \zeta_2 = 0 \quad (3.2)$$

Из (3.2), так же, как и из (2.2), в предельном случае $\zeta_1 \rightarrow \infty, \zeta_2 \rightarrow \infty$ получается уравнение задачи Коненкова (2.4).

Требуя, чтобы $\beta_n^2 = 1 + \alpha_n^2$ было бы корнем уравнения (3.2), приводит к уравнению $\lambda_n a$, определяющему границу появления локализованных колебаний

$$\frac{2 - \nu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{th}(\sqrt{2}\lambda_n a) - \frac{\nu}{2 - \nu} \lambda_n a = 0 \quad (3.3)$$

Считая, что уравнение (3.3) определяет достаточно большое $\lambda_n a$, в приближении $\operatorname{th}(\sqrt{2}\lambda_n a) \approx 1$ получим:

$$\lambda_n a > \frac{(2 - \nu)^2}{\sqrt{2\nu}} \quad (3.4)$$

Условие (3.4) впервые было получено Товстиком [8] для аналогичной задачи локализованной неустойчивости пластинки.

В табл. 1 приводится сравнение условий появления локализованных колебаний для случаев закрепления и свободного опирания четвёртой стороны пластинки.

Таблица 1

ν	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\lambda_n a$ по (2.7)	25,60	11,60	7,02	4,81	3,54
$\lambda_n a$ по (3.4)	25,53	11,46	6,81	4,53	3,18

Зависимость отношения сторон пластинки от коэффициента Пуассона, при которых появляется ЛК

4. На четвёртой стороне пластики имеем скользящий контакт. В заключении приведём решение задачи колебаний прямоугольной пластинки для четвёртого края с граничными условиями скользящего контакта

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ при } x = a \quad (4.1)$$

Требуя, чтобы решение (1.5), с учётом (1.11) удовлетворяло граничным условиям (4.1), приводит как и в предыдущих случаях, к системе алгебраических уравнений

относительно произвольных постоянных A_n, B_n . Условия равенства нулю детерминанта этой системы даёт искомое дисперсионное уравнение

$$p_2 \frac{p_2^2 - 2 + v}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{th} \zeta_2 - p_1 \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \operatorname{th} \zeta_1 = 0 \quad (4.2)$$

Заметим, что уравнение (4.2) отличается от уравнения (3.2) для случая свободно опёртого края $x = a$, переменная местами множителей при $\operatorname{th} \zeta_1$ и $\operatorname{th} \zeta_2$. Из уравнения (4.2) в предельном случае $\zeta_1 \rightarrow \infty, \zeta_2 \rightarrow \infty$ также получается уравнение задачи Коненкова (2.4). Однако, уравнение (4.2) имеет решение, удовлетворяющее условию существования локализованных колебаний при любых значениях $\lambda_n a$ и $v \neq 0$. В этом нетрудно убедиться, если рассмотреть уравнение (4.2) в приближении

$$(\lambda_1 a)^2 \ll 1 \quad (4.3)$$

При допущении (4.3) уравнение (4.2) заменяется уравнением

$$p_2^2 (p_1^2 - v)(p_2^2 - 2 + v) - p_1^2 (p_2^2 - v)(p_1^2 - 2 + v) = 0 \quad (4.4)$$

которое, после некоторых преобразований приводится к виду

$$(p_2^2 - p_1^2)(p_1^2 p_2^2 - v^2) = 0 \quad (4.5)$$

Из (4.5), т.к. $p_2 \neq p_1$, следует искомое решение

$$\beta_n^2 = 1 + \alpha_n^2 - v^2 \quad (4.6)$$

В случае, когда край пластины $x = 0$, как край $x = 0$, также свободен, задача ввиду симметрии, разделяется на две задачи: симметричные и антисимметричные колебания относительно плоскости $x = 0,5$. Т.е. частоты колебаний такой пластинки будут объединением частот колебаний рассмотренных задач со свободным опиранием и скользящим контактом при $x = a$ заменой a на $0,5a$.

Закключение. Приведено решение задачи колебаний прямоугольной пластинки с одним свободным краем. Получены условия существования локализованных колебаний при различных граничных условиях на крае пластинки, противоположном свободному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне рэлеевского типа.// Акуст. Журнал. 1960, т.6.№1, с.124-126 Konenkov Ju.K. On a bending wave of Rayleigh type// Acoust-journal. 1960, v.6, .№1, p.124-126
2. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010, 280 с. Wilde M.V., Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu. Boundary and interface resonance phenomena in elastic bodies. M.: Fizmatlit, 2010. 280p.
3. Lawrie J.B., Kaplunov J. Edge waves and resonance on elastic structures: an overview// Mathematics and Mechanics of Solids. 2012, Vol.17, №1, p.4-16.

4. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P. Localised Flexural Vibrations of Membrane Cylindrical shells// the Journal of the Acoustical Society of America 2017, 141 (3) p.1947-1952
5. Belubekyan M.V. On the condition of planar localized vibration appearance in the vicinity of the free edge of a thin rectangular plate// Proc. of the Yerevan State Univ (Phys and Meth. scien) 2017, 51 (1) p.42-45
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М: Наука, 1987. 360 с. Ambartsumian S.A. Theory of Anisotropic Plates. M.: Nauka, 1987. 360 p.
7. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки// Прикладная механика, НАН Украина, 1994, т.30, №2, с.61-68 Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V. On the problem of bending waves localized along the edge of a plate// Applied mechanics, NAS Ukraine, 1994, v.30, №2, p.61-68.
8. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек (Асимптотические методы) М. Наука, физматлит. 1995, 320 с. Tovstik P.E. The stability of thin shells. Asymptotic methods) M.: Nauka, Fizmathlit, 1995. 320 p.

Сведения об авторе:

Белубекян Мелс Вагаршакович – к. ф.- н., профессор, гл. науч. сотр. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения

Тел.: (+374 10) 52 15 03, (+374 10) 58 00 96.

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНОТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЧАСТИЧНО ПРОЗРАЧНЫХ ТЕЛАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Гачкевич А.Р., Казарян К.Б., Терлецкий Р.Ф.

Ключевые слова: механотермодиффузионные процессы, многокомпонентные частично прозрачные тела, электромагнитное излучение светового диапазона частот.

Key words: coupled mechanical, thermal, and diffusive processes; multicomponent semitransparent solid, electromagnetic radiation in visible range.

Hachkevych O.R., Ghazaryan K.B., Terletsii R.F.

Modelling of mechanothermodiffusion in multicomponent semitransparent solids subjected to radiation

Abstract. A mathematical model to describe coupled mechanical, thermal and diffusive processes in multicomponent semitransparent solids (solid solutions) subjected to electromagnetic radiation in visible ranges (thermal or laser) is developed.

Аннотация. Предложена математическая модель описания связанных механических, тепловых и диффузионных процессов в частично-прозрачных твёрдых телах (твёрдых растворах) при воздействии электромагнитного излучения светового диапазона частот (теплого или лазерного).

1. Введение. Исторически построение конкретных моделей механики взаимосвязанных полей обусловлено разработкой теорий:

- пьезоэлектрических (пьезомагнитных, пьезополупроводниковых) тел, в связи с широким использованием электромеханических преобразователей энергии (в частности, для контроля колебаний элементов конструкций);
- магнитоупругости для исследования механического поведения (в частности, устойчивости) электропроводных (токонесущих) тел в магнитном поле;
- распространения волн в деформируемых (в частности, предварительно деформированных или с начальными напряжениями) телах с учётом связанности механических и электромагнитных полей касательно проблем геофизики, сейсмологии, а также создания методов неразрушающего контроля напряжений в телах;
- термообработок тел, основанных на использовании внешнего электромагнитного излучения (радиочастотного диапазона – высокочастотного и сверхвысокочастотного, а также светового – теплового или лазерного). Подробный обзор исследований по данным направлениям изложен в [1, 2].

В частности, в развитие общей теории магнитоупругости существенный вклад внесли учёные армянской школы механики, возглавляемой академиком С.А. Амбарцумяном. Построены общие асимптотические решения трёхмерных уравнений магнитоупругости для оболочек и пластин, сформулирована гипотеза магнитоупругости тонких тел [7 и др.]. С использованием этих подходов решён ряд конкретных задач магнитоупругих колебаний и магнитоупругой устойчивости [92-94 и др.].

В последнее время всё интенсивно развиваются исследования электромагнитных, тепловых, механических процессов во взаимосвязи с переносом массы в деформируемых твёрдых телах. Это вызвано потребностями электронной техники, в частности, связанными с созданием новых электротехнических материалов (диэлектрических, электропроводных, полупроводниковых), а также прогнозированием электрических, магнитных, тепловых и механических свойств материалов, содержащих инородные примеси, и их термомеханического поведения при комплексных нагружениях (механических, тепловых, диффузионных и электромагнитных). Соответствующие модели механотермодиффузии упомянутых типов тел строились на основе термомеханики смесей [7-9] или теорий деформируемых твёрдых растворов [10, 11] с использованием известных теорий электромеханического взаимодействия [12]. Электромагнитные процессы учитывались лишь при воздействии ЭМИ радиочастотного диапазона длин волн.

Ниже рассматривается математическая модель количественного описания обусловленных воздействием внешнего электромагнитного излучения (ЭМИ) светового диапазона частот (теплого или лазерного) взаимосвязанных процессов переноса излучения, тепла, массы и деформирования в частично прозрачных для излучения многокомпонентных твёрдых телах (твёрдых растворах). Она основана на континуальной модели твёрдой смеси доминантной компоненты (каркаса) и примесей и феноменологической теории распространения излучения, а также на учёте неоднородности энергетического состояния компонент в физически малых элементах тела.

2. Общие соотношения механики и термодинамики для многокомпонентных деформируемых твёрдых тел (твёрдых смесей) взаимодействующих с электромагнитным излучением. При формулировании балансовых соотношений механики и второго закона термодинамики для многокомпонентных твёрдых тел (гомогенных твёрдых смесей N химически не реагирующих компонент), с учётом объёмного характера введения энергии ЭМИ в такие тела, использованы подходы механики многоскоростных континуумов [8, 9, 13, 14 и др.]. Согласно их каждой из компонент тела ставится в соответствие отдельный материальный континуум, а модель тела строится как совокупность таких взаимопроникающих континуумов (которые взаимодействуют между собой путём обмена импульсом и энергией). Многокомпонентное твёрдое тело рассматривается как пространственно неоднородная неравновесная открытая термодинамическая система, которая может обмениваться массой (массообмен) и энергией (теплообмен, действие внешнего ЭМИ) с внешней средой.

Факторами воздействия внешнего ЭМИ на компоненты тела принимаются объёмные силы, а также притоки энергии к компонентам вследствие поглощения энергии ЭМИ (определяемые объёмными тепловыделениями в теле). Факторы воздействия ЭМИ, рассчитанные на единицу массы отдельных компонент, могут существенно отличаться. Это вызывает возрастание диффузионных потоков (явление стимулированной ЭМИ диффузии). При этом вызванная ЭМИ неоднородность энергетического состояния компонент сопровождается (при установлении теплового равновесия) неравновесными процессами обмена энергией и импульсом в физически

малых элементах тела.

Движение многокомпонентного тела определяется законами движения материальных точек компонент $x_i = x_i^{(k)}(X_\alpha^{(k)}, t)$ со скоростями $\dot{x}_i^{(k)} = \frac{\partial}{\partial t}[x_i^{(k)}(X_\alpha^{(k)}, t)]$

($i, \alpha = \overline{1, 3}$). Здесь $x_i, X_\alpha^{(k)}$ – декартовы пространственные и материальные координаты точек k -й компоненты, которые определяют соответственно её актуальную $R_t^{(k)}$ и исходную (отсчётную) $R_R^{(k)}$ конфигурации. Рассматривается тело с доминантной компонентой (каркасом или основной матрицей) [14], с которой связываются конфигурационные и деформационные характеристики тела ($\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$ – вектор перемещения, $\vec{X} \equiv \vec{X}^{(L)}$, индекс “ L ” здесь и далее относится к характеристикам точек каркаса), а скорость $\dot{\vec{x}}^{(L)}$ точек этой компоненты выбирается в качестве характеристической [8]. Все другие компоненты тела считаются примесями, а их движение относительно каркаса рассматривается как диффузионное ($\vec{w}^{(k)} = \dot{\vec{x}}^{(k)} - \dot{\vec{x}}^{(L)}$ – диффузионная скорость).

Механика многокомпонентного твёрдого тела при действии ЭМИ строится на основе физических законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения и энергии, которые в интегральной форме при пространственном описании формулируются для каждой компоненты отдельно [8, 13, 14]. При этом, в качестве характеристик компонент принимаются парциальные величины: ρ_k, U_k – плотности массы и внутренней энергии; $t_{ij}^{(k)}$ – составляющие тензора напряжений Коши, которые соответствуют в многокомпонентном теле составляющим $\vec{P}_n^{(k)}$ вектора поверхностных усилий (определяют передачу усилий компонентами); $\vec{q}^{(k)}$ – векторы тепловых потоков, а также количество движения $\vec{g}^{(k)}$ и энергии U_k^* , которые единицы массы компонент получают при взаимодействии с другими компонентами. Воздействие внешнего ЭМИ на компоненты учитывается плотностями объёмных сил $\vec{f}^{(k)}$ и притоками энергий ψ_k . С использованием обобщённой теоремы переноса Рейнольдса, принципов локальности и суперпозиции свойств смеси получена система балансовых уравнений механики для многокомпонентного твёрдого тела с доминантной компонентой в локальной (дифференциальной) форме

$$\rho_L \frac{d^{(L)} c_k}{dt} + I_{i,i}^{(k)} = 0, \quad J \rho_L (X_\alpha, t) = \rho_{0L} (X_\alpha), \quad (1)$$

$$\rho_L \frac{d^{(L)} [(\sum_{k=1}^N c_k) \dot{x}_i^{(L)}]}{dt} = t_{ij,j} + \rho_L f_i - \sum_{k=1}^N \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t}, \quad t_{ij} = t_{ji}, \quad (2)$$

$$\rho_L \frac{d^{(L)} U}{dt} = t_{ij} \dot{x}_i^{(L)} - q_{j,j} - q_{j,j}^{(m)} + \sum_{k=1}^N (f_i^{(k)} I_i^{(k)} + \rho_L c_k \Psi_k) -$$

$$-\frac{1}{2} \dot{x}_i^{(L)} \dot{x}_i^{(L)} \sum_{k=1}^N I_{j,j}^{(k)} - \dot{x}_i^{(L)} \sum_{k=1}^N (I_j^{(k)} \dot{x}_i^{(L)})_{,j} - \frac{d^{(L)} \dot{x}_i^{(L)}}{dt} \sum_{k=1}^N I_i^{(k)}, \quad (3)$$

а также (моделируя физическую поверхность тела (каркаса) сингулярной поверхностью в областях конфигураций примесных компонент) условия в скачках (отдельные граничные условия), в частности, условия, соответствующие массообмену примесными компонентами. В уравнениях (1) – (3): $c_k = \rho_k / \rho_L$ – концентрации, а $\vec{I}^{(k)} = \rho_k \vec{w}^{(k)}$ – потоки массы примесных компонент; ρ_{0L} – плотность каркаса в исходной конфигурации;

$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \right)$; $\frac{d^{(L)}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_i^{(L)} \frac{\partial}{\partial x_i}$ – субстанциональная производная по времени для области каркаса; ε_{ijl} – тензор Леви-Чивита; запятая перед индексом означает дифференцирование. Характеристики для многокомпонентного твёрдого тела – плотность внутренней энергии U , тензор напряжений Коши t_{ij} , поток тепла q_i и поток энергии $q_i^{(m)}$, вызванный переносом массы – определяются в (1) – (3) следующим образом:

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^N [t_{ij}^{(k)} - \rho_k (w_i^{(k)} w_j^{(k)} + \dot{x}_i^{(L)} w_j^{(k)} + w_i^{(k)} \dot{x}_j^{(L)})],$$

$$U = \sum_{k=1}^N c_k (U_k + w_i^{(k)} w_i^{(k)} / 2), \quad q_j = \sum_{k=1}^N q_j^{(k)}, \quad q_j^{(m)} = \sum_{k=1}^N \mu_{ij}^{(k)} I_i^{(k)}, \quad (4)$$

где

$$\mu_{ij}^{(k)} = (-\dot{x}_n^{(L)} \dot{x}_n^{(L)} + w_n^{(k)} w_n^{(k)} + 2U_k) \delta_{ij} / 2 - \rho_k^{-1} t_{ij}^{(k)} - \dot{x}_i^{(k)} \dot{x}_j^{(k)} \quad (5)$$

– тензорные химические потенциалы компонент, δ_{ij} – символ Кронекера. Величины плотностей объёмных сил $\vec{f}$ и притока энергии ψ к телу [12, 14, 15] (факторы влияния ЭМИ на многокомпонентное тело) связаны с соответствующими факторами влияния ЭМИ на отдельные компоненты соотношениями:

$$f_i = \sum_{k=1}^N c_k f_i^{(k)}, \quad \psi = \sum_{k=1}^N c_k \Psi_k. \quad (6)$$

При этом $\psi = Q$, где Q – плотность тепловыделений.

В случае малых концентраций примесных компонент ($c_k \ll 1$) многокомпонентное твёрдое тело рассмотрено в приближении слабого твёрдого раствора (СТР) [8, 14]. Балансовые уравнения в этом случае получаются из (1) – (3) при $\sum_{k=1}^N c_k \approx 1$,

$\sum_{k=1}^N \bar{I}^{(k)} \approx 0$. Для СТР, при достаточно малых концентрациях примесных компонент, материальные частицы (материальные точки) данной компоненты считаются не взаимодействующими как между собой ($t_{ij}^{(k)} \approx 0$, $q_i^{(k)} \approx 0$), так и с частицами иных компонент ($U_k^* \approx U_{(kL)}$, $\bar{g}^{(k)} \approx \bar{g}^{(kL)}$). Тогда, выражение для потока энергии $q_i^{(m)}$ представляется в виде $q_i^{(m)} = \sum_{k=1}^N \mu_k I_i^{(k)}$ (где $\mu^{(k)} = U_k + w_n^{(k)} w_n^{(k)} / 2$ – скалярный химический потенциал). Уравнения баланса энергий примесных компонент будут

$$\frac{d^{(L)} U_k}{dt} = \psi_k + U_{(kL)} + \dot{x}_i^{(L)} g_i^{(kL)}. \quad (7)$$

При этом, энергетическое состояние примесной компоненты в СТР при воздействии ЭМИ определяется притоком энергии ψ_k к единице массы компоненты и её характеристиками $U_{(kL)}$, $\bar{g}^{(kL)}$ обмена энергией и количеством движения с каркасом.

Для описания локально-неравновесных состояний в физически малых элементах СТР (при вызванной воздействием ЭМИ неоднородности энергетического состояния компонент) использованы подходы неравновесной (рациональной) термодинамики континуума [14, 15, 17]. Второй закон термодинамики сформулирован в форме неравенства Клаузиуса-Дюгема

$$\rho_L \frac{d^{(L)} \eta}{dt} + (q_i T^{-1})_{,i} - \rho_L Q T^{-1} \geq 0. \quad (8)$$

Здесь η , T – плотность энтропии и температура в СТР. Получено диссипативное неравенство, в котором учтено рассеивание энергии ЭМИ (тепловыделения).

Система балансовых соотношений механики и второй закон термодинамики для СТР сформулированы в материальном описании на области исходной конфигурации каркаса (конфигурации многокомпонентного твёрдого тела).

2. Моделирование процесса распространения излучения в частично прозрачных твёрдых смесях. Факторы влияния теплового излучения на смесь.

Пусть многокомпонентное частично прозрачное тело находится под воздействием ЭМИ светового диапазона частот (включает инфракрасное излучение ($3 \cdot 10^{11} \div 3 \cdot 10^{14}$ Гц), видимый свет ($3 \cdot 10^{14} \div 3 \cdot 10^{15}$ Гц) и ультрафиолетовое излучение ($3 \cdot 10^{15} \div 3 \cdot 10^{17}$ Гц), которое задаётся во внешней среде спектральной интенсивностью $I_\lambda^{(e)}(x_i^{(e)}, t, \bar{g}_0)$, где λ – длина волны, $x_i^{(e)}$ – координаты точек внешней среды, $\bar{g}_0$ – орт в направлении распространения луча. Для теплового излучения интенсивность пропорциональна спектральной интенсивности излучения абсолютно чёрного тела $I_{\lambda b}(\lambda, T_s)$ при температуре T_s реального источника излучения (нагретого

тела) т. е.

$$I_{\lambda s}(x_i^{(e)}, t, \vec{g}_0) = k_\lambda(x_i^{(e)}, \vec{g}_0) I_{\lambda b}(\lambda, T_s). \quad (9)$$

Здесь $k_\lambda(x_i^{(e)}, \vec{g}_0)$ – коэффициент пропорциональности – заданная функция, вид которой устанавливается в зависимости от энергетических и спектральных характеристик реального источника излучения и его размещения относительно тела. Принимаем, что материал исследуемого тела не рассеивает излучение (для рассматриваемого типа смесей (твёрдых растворов) характерно молекулярное рассеивание, которым можно пренебречь) [18]. Считаем, что для него можно пренебречь также пьезо- и электрооптическими эффектами. Тогда распространение теплового излучения в теле от всех реальных источников импульсного или непрерывного типа [19], которые используются для нагрева (обработки) тел (в диапазоне изменения температур $300\text{ K} < 700\text{ K}$, характерного для режимов термообработок частично прозрачных материалов) можно описать квазистационарным уравнением переноса в приближении неизлучающего материала [20, 21]

$$\frac{\partial I_\lambda(x_i, t, \vec{g}_0)}{\partial g} + a_\lambda(\vec{x}, c_k) I_\lambda(x_i, t, \vec{g}_0) = 0, \quad (10)$$

где $I_\lambda(x_i, t, \vec{g}_0)$ – спектральная интенсивность излучения в теле, которая является функцией координат, времени и направления (g – расстояние вдоль луча), определяющегося ортом $\vec{g}_0$; $a_\lambda(x_i, c_k)$ – спектральный коэффициент поглощения, зависящий в данной точке тела от концентраций примесных компонент. Отметим, что в справочной литературе обычно приводят значения этого коэффициента для беспримесных материалов. Уравнение (10) дополняем граничными условиями, учитывающими связь на поверхности тела спектральной интенсивности I_λ излучения в нем с известной спектральной интенсивностью $I_\lambda^{(e)}$ падающего на тело излучения (создаваемого реальным источником) при определённых экспериментально коэффициентах отражения и преломления.

Если внешнее излучение является нетепловым излучением оптических квантовых генераторов (ОКГ) (лазерным), то оно распределено в отдельных частотных узких спектральных диапазонах – полосах [22]. Его интенсивность $I_\lambda^{(e)}(x_i^{(e)}, t, \vec{g}_0)$ может достигать больших значений (например, при фокусировании, когда средняя интенсивность в падающем пучке $\bar{I}_\lambda \sim 10^{19} \text{ Вт/м}^3 \cdot \text{ср}$). Для описания распространения монохроматического пучка излучения таких интенсивностей используют уравнение [19]

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial g} + \frac{a_\lambda I_\lambda}{1 + \alpha_W I_\lambda} = 0, \quad (11)$$

где α_W – коэффициент нелинейности, а величина $W_a = (1 - R'_\lambda) \times \alpha_W \bar{I}_\lambda (\bar{n}_\lambda)^2$ – критерий Вавилова, который служит для оценки отклонения решения этого уравне-

ния от закона Бугера [21]. Уравнение (10) можно использовать для описания распространения умеренного лазерного излучения, когда $W_a \ll 1$.

Основываясь на уравнениях баланса энергии и момента импульса излучения [21] определены как плотность объёмных сил воздействия излучения на частично прозрачное тело

$$\vec{f}(x_i, t) = \frac{1}{c_0} \int_0^\infty a_\lambda(c_k) \left[\int_{\Gamma=4\pi} I_\lambda(\vec{x}, t, \vec{g}_0) \vec{\Gamma}_0 d\Gamma_{\vec{g}_0} \right] d\lambda, \quad (12)$$

так и плотность тепловыделений в нём

$$Q(x_i, t) = \int_0^\infty a_\lambda(c_k) \left[\int_{\Gamma=4\pi} I_\lambda(\vec{x}, t, \vec{g}_0) d\Gamma_{\vec{g}_0} \right] d\lambda. \quad (13)$$

Здесь $\Gamma, \vec{\Gamma}_0$ – телесный угол и единичный вектор элементарного телесного угла в направлении $\vec{g}_0$, c_0 – электродинамическая постоянная. В используемой модели твёрдой смеси величины объёмных сил и тепловыделений в теле связаны с силами, действующими на единицы массы компонент и притоками энергий к ним соотношениями (6).

В случае воздействия лазерного излучения плотность тепловыделений (13) в теле можно представить в виде

$$Q(x_i, t) = \sum_{n=1}^M \int_0^\infty a_{\lambda_n}(c_k) \left[\int_{\Gamma=4\pi} I_{\lambda_n}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) d\Gamma_{\vec{g}_0} \right], \quad (14)$$

где M – количество полос излучения лазера, а $\Delta\lambda_n$ – их соответствующая ширина; $a_{\lambda_n}, I_{\lambda_n}$ – коэффициент поглощения и интенсивность излучения в теле на длине волны λ_n центра n -той спектральной полосы ОКГ.

Полученные экспериментально спектральные зависимости коэффициента поглощения частично прозрачных тел при наличии примеси имеют характерные зоны примесного поглощения (по сравнению с безпримесными телами). В качестве примера можно привести центры окрашивания в ионных или ковалентных кристаллах, обусловленные наличием межузельных ионов; характерные полосы и линии поглощения для “газовых” примесей, которые присутствуют в полимерных или стеклообразных материалах [22]. При наличии «газовых» примесей (примеси, вещество которых в естественном состоянии является газом) характерные полосы и линии практически совпадают с такими для соответствующего газа, а отличия могут быть учтены в рамках соответствующих моделей спектроскопии [24]. Основываясь на изложенном и физическом содержании коэффициента поглощения a_λ (характеризующем ослабление излучения в теле, которое определяется количеством поглощающих центров), в рассматриваемом многокомпонентном частично прозрачном теле получаем представление

$$a_{\lambda}(x_i, c_k) = a_{\lambda}^L(x_i) + \sum_{k=2}^N a_{\lambda}^{(k)}(c_k), \quad (15)$$

где $a_{\lambda}^L(x_i)$, $a_{\lambda}^{(k)}(c_k)$ – коэффициенты поглощения каркаса и примесей в смеси. При таком представлении, используя выражения (12) и (13) для объемных сил воздействия излучения на частично прозрачное тело и тепловыделений в нём, а также соотношения (6), находим выражения для сил действующих на единицу массы примесей и притоков энергий к ним.

Как правило, зоны примесного поглощения в спектре поглощения частично прозрачных тел имеют вид узких участков – полос поглощения, а сам характер поглощения в полосе сложен и зависит от строения каркаса и частиц примесей, способа их взаимодействия, наличия внешних факторов (воздействия электромагнитного поля, механического нагружения, нагрева и т.п.). Поэтому, для описания каждой такой полосы рассматривают эффективные характеристики: интегральный коэффициент поглощения (интенсивность полосы) $\bar{J}$ и эффективную спектральную ширину $\Delta\lambda^{ef}$, которые определяют в зависимости от отмеченных выше факторов. Эффективная ширина полосы для упомянутых “газовых” примесей и центров окрашивания составляет 0,01 – 1 мкм. Количество полос, порождаемых данной примесной компонентой, конечно и для “газовой” примеси определяется количеством атомов, образующих её молекулу. При известных из эксперимента или расчёта характеристиках полос, эффективный коэффициент поглощения в данной n_k спектральной полосе k -й примеси определяется следующим образом:

$$a_{\lambda_{n_k}} = \bar{J}_{\lambda_{n_k}} / \Delta\lambda_{n_k}^{ef}, \quad (16)$$

где λ_{n_k} – центр n_k -й полосы, $\bar{J}_{\lambda_{n_k}}$ – её интенсивность, а $\Delta\lambda_{n_k}^{ef}$ – эффективная ширина. Определённый для примеси эффективный коэффициент поглощения в полосе, зависит, кроме названных выше факторов, также от концентрации c_k примеси в теле.

Для расчёта эффективных характеристик полос в реальных газах или смесях известны несколько моделей, в частности, экспоненциальная модель широкой полосы [24]. Она позволяет рассчитать эти характеристики и соответственно коэффициент поглощения в полосе (с учётом столкновений молекул газа, вызывающих расширение полос) при различных значениях давления в газе. При этом, зависимость коэффициента поглощения $a_{\lambda_{n_k}}$ в полосе от давления в нём (или его плотности) является линейной (что подтверждается экспериментально). В рамках такой модели, описывая “столкновения” газовых молекул с каркасом в частично прозрачном слабом твёрдом растворе, как взаимодействие с квазичастицами фононами (при соответствующем фононном давлении), можно рассчитать коэффициенты поглощения $a_{\lambda_{n_k}}$ “газовой” примеси в полосах в зависимости от её концентрации [25, 26]. Заметим, что значения коэффициента поглощения для реального газа (образованного молекулами k -й примеси) при таком

давлении и коэффициента поглощения «газовой» примеси в растворе (при соответствующих её концентрациях) практически совпадают. Поэтому, учитывая линейную зависимость коэффициента поглощения реального газа в полосе от его плотности, для коэффициента поглощения k -й «газовой» примеси в многокомпонентном теле получено выражение [3]

$$a_{\lambda}^{(k)}(T, c_k) = \sum_{n_k=1}^{N_k} a_{\lambda_{n_k}}(T, c_k), \quad a_{\lambda_{n_k}}(T, c_k) = a_{\lambda_{n_k}}^*(T) c_k, \quad (17)$$

где N_k – количество полос поглощения k -й примеси, $a_{\lambda_{n_k}}^* = a_{\lambda_{n_k}}^{atm}(T) \rho_L / \rho_k^{atm}$;

$a_{\lambda_{n_k}}^{atm} = \bar{J}_{\lambda_{n_k}}^{atm}(T) / \Delta \lambda_{n_k}^{ef\,atm}(T)$; ρ_k^{atm} – плотность реального k -го газа при атмосферном

давлении, T – температура в теле. Значения величин $\bar{J}_{\lambda_{n_k}}^{atm}(T)$, $\Delta \lambda_{n_k}^{ef\,atm}(T)$ вычисля-

ются для рассматриваемой примеси по экспоненциальной модели широкой полосы при $\rho_k = \rho_k^{atm}$. В первом приближении эти характеристики могут быть приняты равными характеристикам реального газа при атмосферном давлении (значения которых для большинства газов протабулированы).

Используя представления (17), получаем соответствующие выражения для сил, действующих на единицу массы примесей и притоков энергий.

Таким образом, конкретизированы факторы влияния теплового излучения на частично прозрачную твёрдую смесь, входящие в сформулированные ранее соотношения механики и термодинамики для многокомпонентных деформируемых твёрдых тел (твёрдых смесей), взаимодействующих с электромагнитным излучением. Они выражены через характеристики поля излучения в смеси и поглощательные характеристики составляющих её компонент и являются исходными во многих предложенных конкретных моделях механотермодиффузии частично прозрачных многокомпонентных тел при тепловом и лазерном облучении [27-30].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гачкевич О.Р., Терлецкий Р.Ф. Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризованих електропровідних деформованих твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 3. – С. 19-37.
2. Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Терлецкий Р. Механотермодифузійні процеси в частково прозорих деформованих твердих тілах з домішками при електромагнітному опроміненні за світлового діапазону частот // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Вип. 3.– 2006. – С. 42-55.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272с.
4. Казарян К.Б. Об устойчивости токнесущей оболочки во внешнем магнитном поле // Изв. АН Арм. ССР. Механика – 1979. – **32**, №1. – С. 26-35.

5. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1999. – 440с.
6. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. – Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1991. – 144с.
7. Bowen R.M. Theory of mixtures // Continuum physics III / Ed. by A.C. Eringen. – New York: Academic Press, 1976. – 127p.
8. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
9. Рушицкий Я.Я. Элементы теории смеси. – К.: Наука, 1991. – 160с.
10. Подстригач Я.С., Павлина В.С. Диффузионные уравнения термодинамических процессов в -компонентном твердом растворе // Физ.-хим. механика материалов. – 1965. – №4. – С. 383-389.
11. Бурак Я.И., Галапац Б.П., Чапля Е.Я. Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – №5. – С. 8-14.
12. Hutter K. and van de Ven A.A. Field-matter interaction in thermoelastic solids. – Lecture Notes in Physics. – 88. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – 234p.
13. Слеттери Д. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. – М.: Энергия, 1978. – 448с.
14. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1991. – 288с.
15. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. – Т. 4.
16. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазистационавшихся электромагнитных полей. – Киев: Наукова думка, 1992. – 192с.
17. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592с.
18. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением: Справочник – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432с.
19. Григорьев Б.А. Импульсный нагрев излучениями: В 2 т. – М.: Наука, 1974. – Т.1. – 320с.
20. Зигель Р., Хауэлл Д. Теплообмен излучением. – М.: Мир, 1975. – 935с.
21. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 277с.
22. Делоне Н.Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. – М.: Наука, 1989. – 280с.
23. Уэрт Ч., Томсон Р. Физика твердого тела. – М.: Мир, 1966. – 568с.
24. Тьен К.Л. Радиационные свойства газов // Успехи теплопередачи. – М.: Мир, 1971. – С. 280-360.
25. Гачкевич О.Р., Курницкий Т.Л., Терлецкий Р.Ф. Математичне моделювання

- фотостимульованої дифузії домішок у частково-прозорих твердих тілах // Мат методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 3. – С. 107-119.
26. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф. Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у частково-прозорих деформівних твердих тілах з газовими домішками за умов дії електромагнітного випромінювання світлового діапазону частот // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 151-164.
27. Gachkevich A., Kournyts'kyi T., Terlets'kii R. Photostimulated molecular gas admixture diffusion in semitransparent amorphous solid // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 2001. – **28**, № 3. – P. 399-410.
28. Gachkevich A., Kournyts'kyi T., Terlets'kii R. Investigation of molecular gas admixture diffusion, heat transfer and stress state in amorphous solid subjected to thermal infrared radiation // Int. J. Eng. Sci. – 2002. – **40**, № 8. – P. 829-857.
29. Gachkevich A., Kournyts'kyi T., Matysiak S. Effect of laser radiation upon heat and mass transfer in two-component elastic semitransparent layer // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 2004. – **47**. – P. 977-985.
30. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 2: Механотермодифузія в частково прозорих тілах / О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький, Т.Л. Курницький. – Львів: СПОЛОН, 2007. – 184с.

Сведения об авторах:

Гачкевич Александр Романович, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом Института прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Пидстригача НАН Украины. **Адрес:** ул. Наукова, 3-б, г. Львов, Украина, 79060.

E-mail: dept13@iapmm.lviv.ua

Казарян Карен Багратович, доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Адрес:** пр. Маршала Баграмяна, 24/2, г. Ереван, Армения, 0019. **E-mail:** ghakarren@gmail.com

Терлецький Ростислав Федорович, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Института прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Пидстригача НАН Украины.

Адрес: ул. Наукова, 3-б, г. Львов, Украина, 79060.

E-mail: dept13@iapmm.lviv.ua

ВОЛНЫ ФЛОКЕ В НЕОДНОРОДНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Казарян К.Б., Казарян Р.А., Папян А.А.

Ключевые слова: стержень, Волны Флоке, периодическая структура.
Keywords: Rod, Floquet waves, periodic structure.

Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Papyan A.A.
Floquet waves in an inhomogeneous periodic rod

Abstract. The problems of propagation of longitudinal waves are considered in an elastic rod of a periodic structure consisting of alternating two exponentially functionally graded piecewise inhomogeneous elastic materials. It is shown that the inhomogeneity leads to a significant expansion of the forbidden bands and opens up new forbidden frequency bands.

Аннотация. Рассмотрены вопросы распространения продольных волн в упругом стержне периодической структуры из альтернативно чередующихся двух экспоненциально функционально-градуированных кусочно-неоднородных упругих материалов. Установлено, что неоднородность приводит как к существенному расширению запретных зон, так и открывает новые запретные зоны частот.

Введение. Впервые наличие зон запирания частот в периодической однонаправленной упругой структуре было отмечено в работе [1]. Более детально вопросы распространения упругих волн в периодических структурах изучены в работах [2-9]. Применению теории Флоке к задачам распространения упругих волн в периодических структурах посвящены работы [2,3]. В работах [6,7] исследован спектр волн Флоке – Блоха в упругих периодических волноводах с математической точки зрения. Спектральная теория поперечных колебаний периодических упругих балок изложена в [8-9]. В работе [10] приводится обзор по распространению упругих и электромагнитных волн в периодической структуре и приведён анализ роли импеданса на существование зон запирания частот. В рамках упрощённой модели Коссера в работе [11] рассмотрен вопрос распространения одномерной сдвиговой волны перпендикулярно к границам двух различных периодически чередующихся упругих однородных сред. Установлено, что в диапазоне высоких частот учёт моментных напряжений существенно изменяет структуру запретных зон частот, обусловленных периодичностью среды. Волны Флоке – Блоха в пьезоэлектрической периодической среде изучены в работе [12].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу распространения продольных волн в упругом стержне. Стержень представляет собой периодическую структуру, состоящую из альтернативно чередующихся двух функционально-градуированных кусочно-неоднородных упругих материалов. Стержень с периодически повторяющимся с периодом d элементарной ячейкой $-d_1 < x < d_2$ характеризуется плотностью материала и модулем упругости следующим образом:

$$\rho_{10}(x) = \rho_{10} f_1(x), \quad E_1(x) = E_{10} f_1(x), \quad f_1(x) = \exp[a(x - (n-1)d)], \\ (n-1)d - d_1 < x < (n-1)d \quad (1)$$

$$\rho_{20}(x) = \rho_{20} f_2(x), \quad E_2(x) = E_{20} f_2(x), \quad f_2(x) = \exp[b(x - (n-1)d)] \\ (n-1)d < x < nd - d_1 \quad (2)$$

где a и b есть параметры, характеризующие неоднородность материала. Согласно теории Флоке, рассматриваемая задача требует рассмотрения уравнения движения стержня в интервале $-d_1 < x < d_2$, $(n=1)$.

$$u_1 = u_1(x, t), \quad \sigma_1 = E_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad -d_1 < x < d_2 \quad (3)$$

$$u_2 = u_2(x, t), \quad \sigma_2 = E_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad 0 < x < d_2, \quad (4)$$

совместно с условиями упругого контакта на линии раздела материалов

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad \sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t) \quad (5)$$

и условиями Флоке

$$u_1(-d_1, t) = \lambda u_2(d_2, t), \quad \sigma_1(-d_1, t) = \lambda \sigma_2(d_2, t) \quad (6)$$

Здесь $\lambda = \exp(ikd)$, k – волновое число Флоке.

2. Решение задачи. Представляя решения уравнений (3) и (4) в виде

$$u_1(x, t) = u_{10}(x) \exp(i\omega t), \quad u_2(x, t) = u_{20}(x) \exp(i\omega t), \quad (7)$$

получим следующие решения:

$$u_{10}(x) = \exp\left(-\frac{ax}{2}\right) (B_1 \sin(px) + B_2 \cos(px)) \\ \sigma_{10}(x) = -\frac{1}{2} E_{10} \exp\left(\frac{ax}{2}\right) ((aB_2 - 2B_1p) \cos(px) + (aB_1 + 2B_2p) \sin(px)) \quad (8)$$

$$u_{20}(x) = \exp\left(-\frac{bx}{2}\right) (C_1 \sin(qx) + C_2 \cos(qx)) \\ \sigma_{20}(x) = -\frac{1}{2} E_{20} \exp\left(\frac{bx}{2}\right) ((bC_2 - 2C_1q) \cos(qx) + (bC_1 + 2C_2q) \sin(qx))$$

где $p = \sqrt{\frac{\rho_{10}\omega^2}{E_{10}} - \frac{a^2}{4}}$, $q = \sqrt{\frac{\rho_{20}\omega^2}{E_{20}} - \frac{b^2}{4}}$, B_1, B_2, C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Удовлетворяя решение (8) условиям упругого контакта на линии раздела материалов и условиям Флоке, получим однородную систему уравнений относительно четырёх постоянных B_1, B_2, C_1, C_2 . Из условия равенства нулю определителя этой системы имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$\cos(kd) = F(\eta) \quad (9)$$

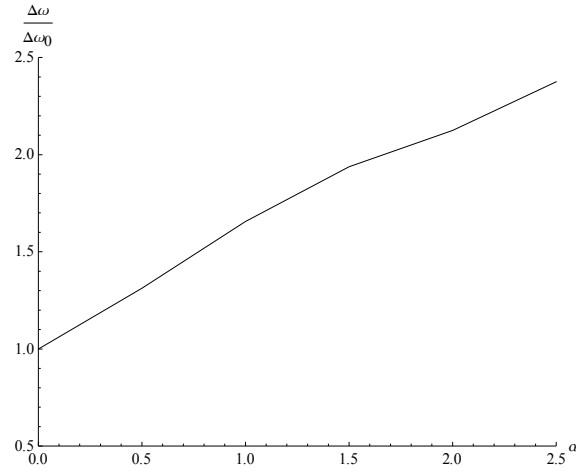
$$F(\eta) = \frac{(1+S^2)\cos(p_0)\cos(q_0)}{2S} - \frac{\alpha_1(1-S^2)\cos(q_0)\sin(p_0)}{2p_0S} - \frac{\alpha_2(1-S^2)\cos(p_0)\sin(q_0)}{2q_0S} - \frac{\left(\chi\alpha_1^2 + 4\chi p_0^2 - \alpha_1\alpha_2(1+S^2)\gamma + \frac{1}{\chi}(\alpha_2^2 + 4q_0^2)S^2\gamma^2\right)\sin(p_0)\sin(q_0)}{8p_0q_0S\gamma}$$

$$\text{где } S = \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right], \quad \gamma = \frac{E_{20}}{E_{10}}, \quad \theta = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \chi = \frac{d_2}{d_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}},$$

$$p_0 = \sqrt{\eta^2 - \frac{\alpha_1^2}{4}}, \quad q_0 = \sqrt{\theta\chi^2\eta^2 - \frac{\alpha_2^2}{4}}, \quad \eta = \frac{\omega d_1}{c_1}, \quad \alpha_1 = ad_1, \quad \alpha_2 = bd_2.$$

Дисперсионные уравнения (9) определяют волновое число k в зависимости от частоты η . Если имеются области значений η , для которых $|F(\eta)| > 1$, то в этой области частот распространение продольной волны не имеет места (в этом случае волновое число k не является действительным).

Проведём сравнительный численный анализ уравнения, исследуя роль параметра неоднородности на формирование запретных зон частот. На примере конкретного материала $\theta = 3$, $\chi = 2$, $\gamma = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. На фиг.1 приведён график зависимости относительной ширины первой запретной зоны $\Delta\omega/\Delta\omega_0$, где $\Delta\omega_0$ – ширина первой запретной зоны кусочно-однородного стержня ($\alpha=0$). Как следует из вида графика зависимости, неоднородность существенно увеличивает ширина первой запретной зоны. Аналогичный эффект расширения имеет место и для остальных запретных зон.



Фиг. 1. Зависимость относительной ширины первой запретной зоны частоты от параметра неоднородности

3. Рассмотрим частные случаи уравнения (9):

1. Кусочно-однородный стержень:

В этом случае для $F(\eta)$ получим известную функцию [2]:

$$F(\eta) = \cos(p_0) \cos(q_0) - \left(\frac{\chi p_0}{2q_0 \gamma} + \frac{\gamma q_0}{2\chi p_0} \right) \sin(p_0) \sin(q_0) \quad (10)$$

2. Импедансы материалов равны $E_{10}\rho_{10} = E_{20}\rho_{20}$, а коэффициенты, характеризующие неоднородность материала, равны $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

$$\text{В этом случае имеем: } F(\eta) = \cos(p_0 + q_0). \quad (11)$$

Из (11) следует, что в этом случае отсутствуют зоны запирания частот.

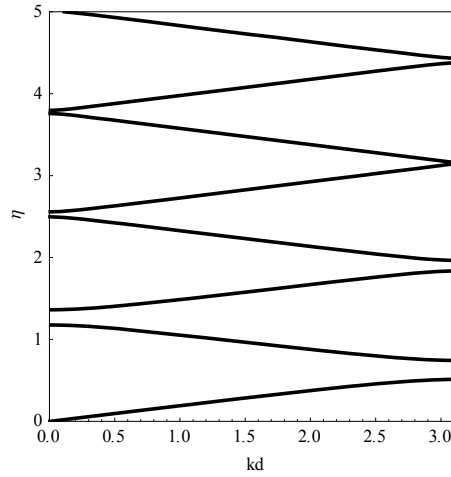
3. Импедансы материалов равны, а коэффициенты, характеризующие неоднородность материала, равны друг другу с отрицательным знаком

$$E_{10}\rho_{10} = E_{20}\rho_{20}, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = -\alpha. \quad (12)$$

Тогда, уравнение (9) будет иметь следующий вид:

$$F(\eta) = \cos\left(\sqrt{\eta^2 - \frac{\alpha^2}{4}}\right) \cos\left(\sqrt{\theta^2 \chi^2 \eta^2 - \frac{\alpha^2}{4}}\right) - \frac{\chi^2 \eta^2 + \frac{\alpha^2 \chi \gamma}{4}}{\sqrt{\chi^2 \eta^2 - \frac{\alpha^2 \chi^2}{4}} \sqrt{\chi^2 \eta^2 - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4}}} \sin\left(\sqrt{\eta^2 - \frac{\alpha^2}{4}}\right) \sin\left(\sqrt{\theta^2 \chi^2 \eta^2 - \frac{\alpha^2}{4}}\right) \quad (13)$$

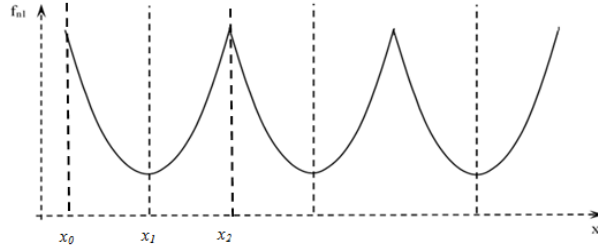
Наличие зон записания частот при определённых значениях параметров $\alpha_1 = 1.7$, $\chi = 1.2$, $\gamma = 0.25$, характеризующие механические и геометрические параметры периодического стержня, проиллюстрированы на фиг.2 в интервале первой зоны Брюллена $0 < kd < \pi$.



Фиг.2. Дисперсионные кривые, полученные на основе (13)

4. Периодическая система состоит из материалов, когда коэффициенты, характеризующие неоднородность материала, равны друг другу с отрицательным знаком (фиг.3):

$$E_{10} = E_{20}, \quad \rho_{10} = \rho_{20}, \quad d_1 = d_2, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = -\alpha \quad (14)$$



Фиг.3. График функции (непрерывный профиль), характеризующий неоднородность материала, $x_0 = (n-1)d - d_1$, $x_1 = (n-1)d$, $x_2 = (n-1)d + d_2$

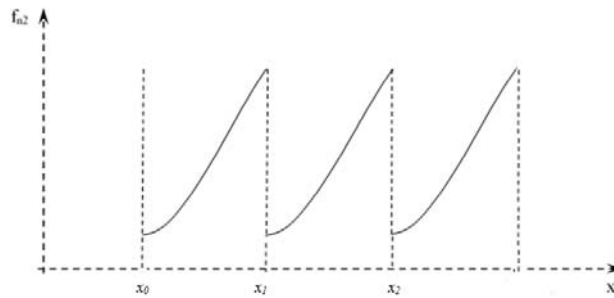
В этом случае функция F запишется в виде:

$$F_1(\eta, \alpha) = \frac{\alpha^2 - 4\eta^2 \cos(\sqrt{\eta^2 - 4\alpha^2})}{\alpha^2 - 4\eta^2} \quad (15)$$

Функция $F_1(\eta, \alpha)$ для определённых значений параметра α имеет $F(\eta, \alpha) < -1$. Наименьшее значение α , при котором $F(\eta, \alpha) = -1$, равно $\alpha_0 = 0.18$. При $\alpha > \alpha_0$ открывается первая запретная зона частот.

5. Периодическая система состоит из материалов, когда коэффициенты, характеризующие неоднородность, равны (фиг.4):

$$E_{10} = E_{20}; \quad \rho_{10} = \rho_{20}; \quad d_1 = d_2; \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha \quad (16)$$

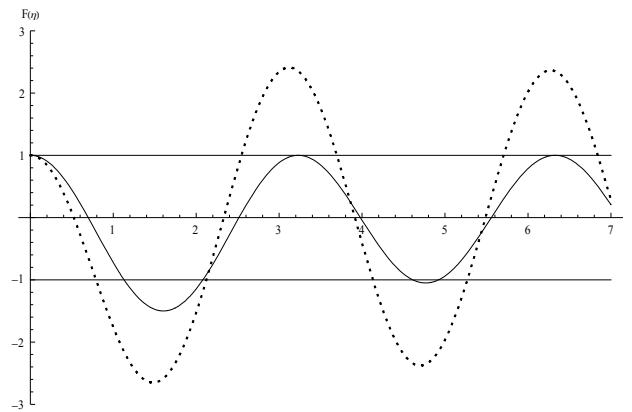


Фиг.4. График функции (прерывный профиль), характеризующий неоднородность материала

В этом случае для функции F имеем:

$$F_2(\eta, \alpha) = \cos\left(\sqrt{4\eta^2 - \alpha^2}\right) \cosh(\alpha) - \frac{\alpha \sin\left(\sqrt{4\eta^2 - \alpha^2}\right) \sinh(\alpha)}{\sqrt{4\eta^2 - \alpha^2}} \quad (17)$$

Наименьшее значение α , при котором $|F_2(\eta, \alpha)| = 1$, равно $\alpha_0 = 0.093$



Фиг.5. Графики функций F_1, F_2 непрерывного (сплошная кривая) и прерывного (прерывистая кривая) профилей

На рис.5 приведены графики функций $F_1(\eta, \alpha), F_2(\eta, \alpha)$ при $\alpha = 1$. Прерывистая кривая соответствует функции $F_2(\eta, \alpha)$, а сплошная кривая – функции $F_1(\eta, \alpha)$.

Анализ этих кривых показывает, что в случае прерывного профиля неоднородности ширина запретных зон увеличивается и открываются новые зоны в отличие от случая непрерывного профиля неоднородности. С увеличением/уменьшением параметра неоднородности α ширина этих зон увеличивается/уменьшается.

Таким образом, можно констатировать, что экспоненциальная неоднородность приводит как к существенному расширению запретных зон, так и открывает новые запретные зоны частот.

Авторы выражают благодарность профессору М.В. Белубеяну за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, On the maintenance of vibrations of forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Phil. Mag., 24 (1887), pp. 145–159.
2. E.H. Lee, A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E. H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp. 122–138.

3. E.H. Lee and W.H. Yang, On waves in composite materials with periodic structure, SIAM Journal on Applied Mathematics., 25 (1973), pp. 492–499.
4. Mingrong Shen , Wenwu Cao, Acoustic bandgap formation in a periodic structure with multilayer unit cells, Journal Phys. D: Appl. Phys. 33 , (2000), p.1150–1154
5. A. Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 69, No. 3, pp. 670–689, (2008).
6. S. Adams, R. Craster, S. Guenneau , Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides, Proceedings Royal Society London A 464 (2008) p.2669-2692,
7. R.V. Craster, S. Guenneau, S. Adams, Mechanism for slow waves near cutoff frequencies in periodic waveguides, Physical Review B, 2009 79, p.045129-5,.
8. V.G. Papanicolaou, The periodic Euler–Bernoulli equation, Trans. AMS 355 (2003), 3727–3759.
9. V.G. Papanicolaou, An Inverse Spectral Result for the Periodic Euler-Bernoulli Equation, Indiana University Mathematics Journal (2004), Volume: 53, Issue: 1, Pages: 223-242.
10. Аветисян А.С., Казарян К.Б. Волны в «фонон-фотон» кристаллах и импеданс. В сб. «Проблемы механики деформируемого твердого тела» посвящ. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. с.15-22.
11. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Сдвиговые упругие волны в периодической среде со свойствами упрощенной модели Коссера. //Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.3-9.
12. G.T. Piliposian , A.S. Avetisyan,, K.B. Ghazaryan, Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium, Wave Motion, v.49 , 1, 2012 p. 125–134.

Сведения об авторах:

Казарян Карен Багратович – Доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института механики НАН РА.

Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24/2, 0019, Ереван, Армения

E-mail: ghkarren@gmail.com

Казарян Рафаэль Аракелович – старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24/2, 0019, Ереван, Армения

Тел.: (099) 39 63 44

Папян Арарат Артурович – кандидат физ. мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА.

Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24/2, 0019, Ереван, Армения

E-mail: papyanararat11@gmail.com

О СРАВНЕНИИ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ БЕТОНОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Карапетян К.А.

Ключевые слова: бетон, растяжение, сжатие, модуль упругости, разномодульность, оптимальное проектирование.

Keywords: concrete, stretching, compression, elastic modulus, multimodulus, optimal design.

Բանալի բառեր: բետոն, ձգում, սեղմում, առաձգականության մոդուլ, տարամոդուլություն, օպտիմալ նախագծում:

Karapetyan K.A.

On the comparison of elasticity modules of constructive concretes under extension and compression

Abstract. On the base of the experimentally proved corresponding data, represented in the well-known papers, their comparative analysis from the point of view of the concretes heterogeneity has been conducted.

It is shown, that light concretes in the natural porous fillers can be absolutely suitable for their application with the purpose of the experimental test of the theoretically obtained results in the field of linear elasticity theory of heterogeneous materials.

It is also shown that taking into account the true module values of the concrete elasticity under extension and compression may essentially promote to optimal projecting of the bendable eccentrically compressed and eccentrically stretched reinforced concrete structural elements.

Аннотация. На основе экспериментально подтверждённых соответствующих данных, представленных в известных работах, был проведён их сравнительный анализ с точки зрения разномодульности бетонов.

Показано, что лёгкие бетоны на природных пористых заполнителях могут быть вполне пригодными для использования их с целью экспериментальной проверки теоретически полученных результатов в области линейной теории упругости разномодульных материалов.

Также показано, что учёт истинных величин модулей упругости бетона при растяжении и сжатии в этапе проектирования может существенным образом способствовать оптимальному проектированию изгибаемых, внецентренно сжатых и внецентренно растянутых железобетонных конструктивных элементов.

Введение. Известно, что как в строительных нормах [1], так и в наследственной теории ползучести [2] не ставится разница между значениями модулей упругости бетона (начальный модуль упругости [1]) при осевом растяжении и сжатии. При этом, согласно строительным нормам, значение начального модуля упругости как при сжатии, так и при растяжении зависит только от класса бетона по прочности на сжатие В. Между тем сравнение весьма немногочисленных экспериментальных данных показывает, что величины модулей упругости одного и того же состава бетона при растяжении и сжатии в некоторых случаях могут существенным образом различаться друг от друга (разномодульность) [3].

Целью настоящей работы является привлечь внимание специалистов на закономерности изменения модулей упругости бетонов при растяжении и сжатии, а также их отношения в зависимости от ряда факторов и определение области применения этих закономерностей при решении соответствующих научно-технических задач.

1.Рассмотрим некоторые результаты исследований, полученные автором, с позиции разномодульности бетона. Отметим, что подобный вопрос для различных видов бетонов подробно рассмотрен в работе [4]. Здесь приводятся отдельные результаты из [4], которые значимы в рамках рассматриваемых в данной работе задач.

В работе [5] обсуждается вопрос влияния процесса десорбции химически не связанной влаги на сопротивляемость разрушению и деформированию при осевом растяжении и сжатии бетона, хранившегося после расформовки в течение 63 мес. в гидроизолированном состоянии. Учитывался и фактор ориентации слоёв укладки бетона по отношению направления действующей на образец нагрузки. Был использован литоидпемзобетон состава по массе 1:1,51:2,37; В/Ц=0,88.

Исследования осуществлялись сразу после освобождения опытных образцов от гидроизоляции, а также периодически, после хранения их в течение 7 сут., 1 мес., 3 мес., 6 мес. и 63 мес. в среде с невысокой влажностью ($w < 75\%$; [1]).

С целью обсуждения рассматриваемого здесь вопроса на основе соответствующих данных работы [5] были определены величины модуля упругости литоидпемзобетона как в случае осевого растяжения, так и при сжатии согласно нижеприведённой формуле [6]:

$$E = \Sigma \Delta \sigma / \Sigma \Delta \epsilon_{\text{ум}},$$

где $\Sigma \Delta \sigma$ – сумма приращений напряжений на каждой ступени нагружения от 0,05 до 0,3 P_p (P_p – величина разрушающей нагрузки), $\Sigma \Delta \epsilon_{\text{ум}}$ – сумма приращений упруго-мгновенных деформаций на каждой ступени нагружения.

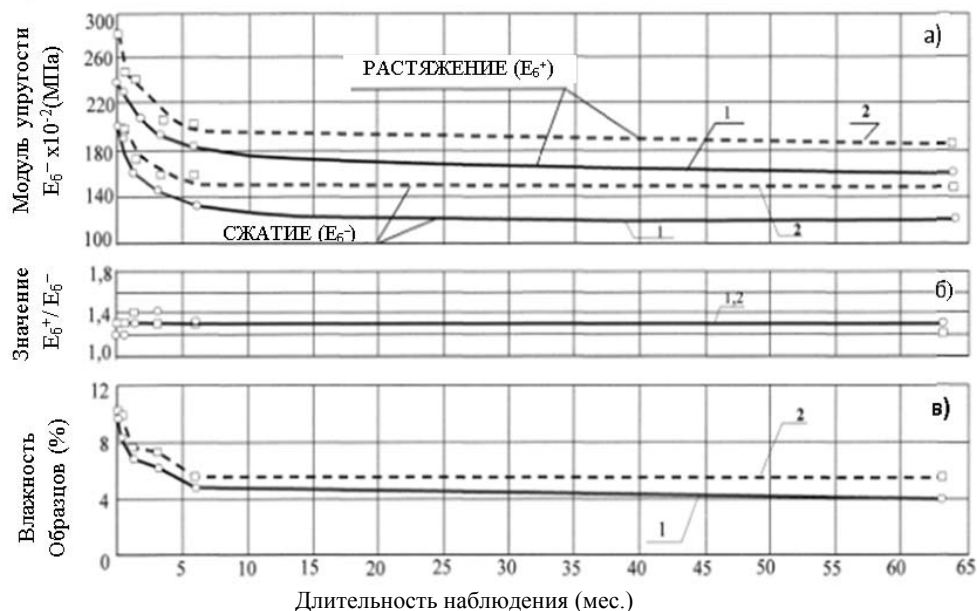
Результаты расчётов целесообразно представить в виде графиков, изображённых на фиг.1.

Из данных этой фигуры замечаем, что, с момента начала процесса десорбции влаги значения модуля упругости гидроизолированного сразу после расформовки литоидпемзобетона как при осевом растяжении (E_6^+), так и при сжатии (E_6^-) уменьшаются с затухающей скоростью (фиг. 1.а).

Сравнение данных, приведённых на фиг.1.а показывает, что спад модуля упругости литоидпемзобетона при сжатии как для образцов, испытанных перпендикулярно по отношению к слоям укладки бетона (образцы ПЕС, кривая 1), так и образцов, испытанных параллельно слоям бетона (образцы ПАС, кривая 2) прекращается практически одновременно с установлением влажностного равновесия (фиг.1.в), в то время как модуль упругости при растяжении ещё достаточное время продолжает убывать, причём, в большей мере для образцов ПЕС (кривая 1, фиг.1.а).

Наблюдаемое явление можно объяснить образованием микротрещин в зонах контакта затвердевшего цементного камня с крупным заполнителем вследствие неодинаковой их сопротивляемости усадке. Очевидно, что образуемые микротрещины существенное влияние на деформативность могут иметь только при растяжении, при этом, разница для образцов ПАС и ПЕС объясняется направленностью микротрещин, главным образом, вдоль слоёв укладки бетона [7].

Проследим за изменением отношения E_8^+ / E_8^- , называемого в литературе коэффициентом разномодульности [3]. Расчётные значения этого коэффициента показаны на фиг.1.б в виде кружочков для образцов ПЕС и квадратиков для образцов ПАС.



Фиг.1. Кривые изменения влажности литоидпемзобетона (в), модулей упругости при сжатии и растяжения (а) и величины их отношений (б) в зависимости от продолжительности процесса десорбции влаги. (1-образцы ПЕС, 2-образцы ПАС)

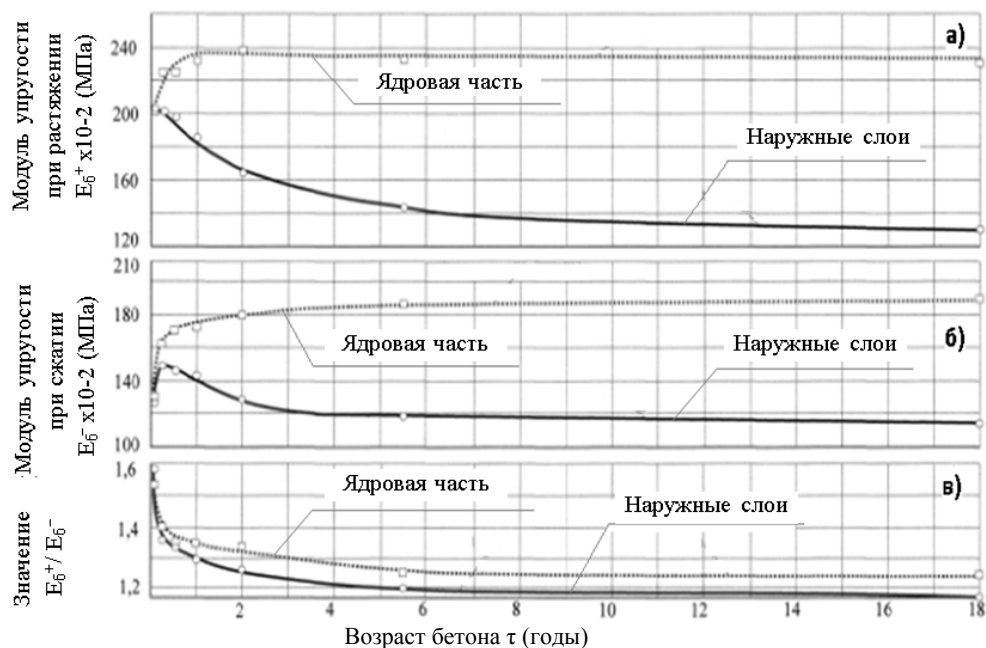
Учитывая, что в обоих случаях испытаний изменение коэффициента разномодульности носит не монотонный характер и ограничивается узкой полосой относительно значения 1,3, указанного на фигуре сплошной линией, можно принять, что коэффициент разномодульности старого литоидпемзобетона практически не зависит от меры его влажности и равен значению 1,3.

В работах [8,9] рассматриваются закономерности изменения в течение 18 лет прочности и способности бетона к деформированию в наружных (периферийных) слоях (толщиной 8-10см от боковой поверхности) и в внутренней (ядровой) части поперечного сечения фрагментов бетонной колонны диаметра 57см, находящейся после изготовления в среде с невысокой влажностью ($W < 75\%$, [1]). Колонна была изготовлена из литоидпемзобетона состава по массе 1:1, 43:2,50; В/Ц=0,86.

На основе экспериментальных данных, представленных в вышеуказанных работах, по приведённой выше формуле были определены величины модуля упругости литоидпемзобетона в различных зонах поперечного сечения фрагментов колонны. Полученные результаты в виде графиков представлены на фиг.2.

Согласно этим графикам, изменение в течение 18 лет значения модуля упругости литоидпемзобетона в ядровой части сечения колонны как при растяжении E_8^+ , так и при сжатии E_8^- имеет один и тот же характер: с увеличением возраста материала наблюдается монотонное его увеличение с убывающей скоростью (см. фиг. 2.а и 2.б). Величина указанного роста модуля упругости по сравнению с его исходным

значением (в возрасте 28 сут.) в случае осевого растяжения составляет более чем 15%, а в случае сжатия – примерно, 44%.



Фиг.2. Кривые изменения во времени модулей упругости при растяжении (а), при сжатии (б) и отношения $E_{\epsilon}^{+}/E_{\epsilon}^{-}$ (в) в различных зонах поперечного сечения массивной литоидпемзобетонной колонны.

В наружных, высыхающих слоях сечения колонны с увеличением возраста до 18 лет при растяжении имеет место уменьшение с убывающей скоростью (примерно, 35% по сравнению с исходным значением), а при сжатии – начальный рост (около 16% в возрасте 3 мес.) и дальнейшее уменьшение (24% по сравнению с величиной в возрасте 3мес.) модуля упругости литоидпемзобетона (фиг. 2.а и 2.б).

Из приведённых на фиг.2.в кривых замечаем, что с ростом возраста наблюдается существенное уменьшение значения коэффициента разномодульности ($E_{\delta}^{+}/E_{\delta}^{-}$) литоидпемзобетона как в наружных слоях, так и в ядре поперечного сечения массивной литоидпемзобетонной колонны. В возрасте 28 сут. значение этого коэффициента в наружных слоях колонны составляет примерно 1,6., а в её ядре – более чем 1,5. Т.е., несмотря на существенную разницу между величинами модулей упругости бетона при растяжении и сжатии в наружных слоях и в ядре колонны (фиг. 2.а и 2.б) в этом возрасте, с точки зрения коэффициента разномодульности, колонна по сечению практически однородна. В 18-летнем же возрасте значение коэффициента разномодульности литоидпемзобетона в наружных слоях и в ядре сечения колонны составляет, соответственно, 1,16 и 1,23. Это означает, что в указанном промежутке времени спад величины коэффициента разномодульности материала в наружных слоях литоидпемзобетонной колонны составляет более чем 27%, а в её ядре – около 18%.

2. На основании результатов работ [7;10] можно сделать определённые выводы о разномодульности бетона.

В работе [7] приводятся и обсуждаются результаты исследования влияния масштабного фактора на прочность и деформативные свойства бетона в условиях осевого сжатия и растяжения. Эксперименты были поставлены на лёгком бетоне, приготовленном на песке и щебне из литоидной пемзы. Состав бетона по массе 1:1,85:3,00; В/Ц=1,00.

Экспериментальные данные этой работы относительно способности литоидпемзобетона к деформированию при кратковременных нагрузениях и рассчитанные на их основе отношения $E_{\delta}^{+} / E_{\delta}^{-}$, которые при малых уровнях напряжения можно принять в качестве коэффициента разномодульности, представим в виде табл. 1.

Согласно данным табл. 1, величина модуля деформации литоидпемзобетона при осевом сжатии мало зависит от размеров поперечного сечения опытных образцов (максимальная разница составляет $\approx 12\%$). В случае же растяжения указанная зависимость весьма существенна: увеличение размеров поперечного сечения опытных образцов от 7х7см до 15х15 - 20х20см приводит к увеличению модуля деформации литоидпемзобетона на 36-28%.

Масштабный фактор играет существенную роль и в изменении коэффициента разномодульности ($E_{\delta}^{+}/E_{\delta}^{-}$) литоидпемзобетона. Значение этого коэффициента для образцов сечением 7х7см составляет 1,04, в то время как для образцов сечением 15х15 - 20х20см оно составляет 1,33-1,26: т.е. рост значения коэффициента разномодульности составляет 28-21% (табл.1).

Таблица 1

Значения модулей деформаций литоидпемзобетона при растяжении и сжатии, представленные в работе [7], и их отношения.

Размеры поперечного сечения опытных образцов, см	Значение модуля деформации литоидпемзобетона $\times 10^{-2}$ в МПа при уровне относительного напряжения $\sigma/R = 0.25$ при		Коэффициент разномодульности $E_{\delta}^{+} / E_{\delta}^{-}$
	растяжении, E^{+}	сжатии, E^{-}	
7х7	120	115	1,04
10х10	138	130	1,06
15х15	163	123	1,33
20х20	154	122	1,26

Результаты экспериментального исследования влияния направления нагрузки по отношению к слоям укладки бетона на касательный модуль деформации при сжатии

и растяжении с учётом возраста материала представлены в работе [10]. В этих исследованиях в качестве опытных образцов были использованы призмы и восьмёрки с размерами поперечного сечения 10х10см, изготовленные как при вертикальном (образцы ПЕС), так и при горизонтальном (образцы ПАС) положениях металлических форм. Был использован литоидпемзобетон состава по массе: 1:1,86:3,03; В/Ц=1,07. Приведённые в работе [10] экспериментальные данные здесь целесообразно представить в виде табл.2.

Сравнение данных табл.2 показывает, что как при осевом растяжении, так и при сжатии величины касательного модуля деформации литоидпемзобетона в возрасте 1 года оказались меньшими, чем в возрасте 29 дней независимо от направления нагрузки по отношению к слоям укладки бетона и указанная разница более существенна в случае осевого растяжения.

Это явление автором работы [10] объясняется образованием микротрещин в опытных образцах в результате нахождения их в течение 11 месяцев в среде с низкой влажностью. До этого образцы после расформовки в течение 27 суток хранились во влажной камере [10].

Согласно данным табл.2, значение коэффициента разномодульности $E_{\delta}^{+} / E_{\delta}^{-}$ в возрасте 29 дней оказалось больше единицы и для образцов ПЕС и для образцов ПАС, в то время как при возрасте материала в 1 года, это значение оказалось меньше единицы (табл.2). Влияние же ориентации направления нагрузки при испытании по отношению к слоям укладки бетона на величины упомянутого коэффициента в возрасте 29 дней оказалось незначительным, в то время как в возрасте 1 года оно существенно.

Таблица 2

Значения модулей деформаций литоидпемзобетона при растяжении и сжатии, представленные в работе [10], и их отношения.

Возраст бетона	Направление нагрузки при испытании по отношению к слоям укладки бетона	Модуль деформации бетона по касательной $\times 10^2$ в МПа при уровне относительного напряжения $\sigma / R = 0$ при		Коэффициент разномодульности $E_{\delta}^{+} / E_{\delta}^{-}$
		растяжении, E^{+}	сжатии, E^{-}	
29 дней	ПЕС	152	138	1,10
	ПАС	156	150	1,04
1 год	ПЕС	72	101	0,71
	ПАС	109	128	0,85

Заключение. Как известно, одним из основных предположений, положенных в основу наследственной теории ползучести упруго-ползучего тела [2], а также теории линейно деформируемых разномодульных материалов [11,12], являются однородность и изотропность материалов. При этом, в указанных теориях в качестве примера материала, обладающего такими свойствами, в частности, указывается и на бетон. Вышеприведённые же данные, очевидным образом показывают, что бетон, в общем случае, является сугубо неоднородным и неизотропным.

С другой стороны, наличие информации о прочностных и деформационных свойствах бетона нескольких различных факторов может позволить получить относительно однородный и изотропный бетон.

Действительно, сравнение прочностных характеристик бетонов, приведённых в нормах проектирования бетонных и железобетонных конструкций [1], показывает, что независимо от марки использованного цемента прочность легких бетонов на природных пористых заполнителях как на сжатие, так и на осевое растяжение невозможно поднять выше некоторого уровня. Этот уровень, главным образом, определяется прочностью самого заполнителя.

Как следует из соответствующих данных указанных выше норм [1] наибольшая нормативная сопротивляемость разрушению легкого бетона ($R_{bn}=29$ МПа при сжатии и $R_{bt}=2,1$ МПа при растяжении) не намного превышает прочность самого легкого заполнителя на сжатие (19,4 - 25,4 МПа для широкоприменяемых в составах легких бетонов туфов и 18,9 - 20 МПа - для литой пемзы [13]).

Очевидно, что подбором марки цемента и соответствующего заполнителя, а также варьированием факторов, влияющих на прочностные и деформативные свойства, можно получить легкий бетон оптимальной прочности, в котором при нагружении будет иметь место, близкое к однородному напряженно-деформированному состоянию.

То же самое нельзя сказать о тяжелых бетонах, поскольку увеличением марки производимого в настоящее время цемента невозможно достичь прочности самого заполнителя (прочность базальта на сжатие составляет примерно 102,2 МПа [13], в то время как наибольшее нормативное сопротивление тяжелого бетона, согласно вышеупомянутым нормам, составляет 43,0 МПа [1]).

Согласно вышеупомянутым строительным нормам [1], расчёт ряда элементов бетонных и железобетонных конструкций по предельным состояниям первой группы осуществляется с учётом сопротивляемости к деформированию бетона растянутой зоны. При этом, принимается, что достижение предельного состояния характеризуется разрушением бетона растянутой зоны (появлением трещин).

Этими же нормами оговорено, что расчёт изгибаемых, растянутых и внецентренно сжатых железобетонных элементов необходимо осуществлять по предельным состояниям второй группы по образованию трещин, нормальных к продольной оси.

Среди предпосылок, необходимых для осуществления вышеупомянутых расчётов, строительными проектными нормами на первый план выдвигается обязательное требование по ограничению относительного удлинения крайнего растянутого волокна бетона конструктивных элементов, выражаемое формулой, в которой фигурирует модуль упругости бетона.

Кроме этого, определение полной величины кривизны изгибаемых, внецентренно сжатых и внецентренно растянутых железобетонных конструктивных элементов

как на участках без трещин, так и на участках с трещинами в их растянутой зоне, строительные нормы рекомендуют осуществлять формулами, в которых так же, как и в предыдущих случаях, фигурирует модуль упругости бетона.

Как уже отмечалось, в строительных нормах проектирования бетонных и железобетонных конструкций ставится равенство между величинами модулей упругости при растяжении и сжатии одного и того же класса бетона по прочности на сжатие [1]. Однако, известные из литературы данные прямых измерений утверждают, что в зависимости от ряда факторов (вид бетона, воздушно-влажностные условия его вызревания и эксплуатации, размеры поперечного сечения конструктивных элементов, направление эксплуатационных нагрузок по отношению к слоям укладки бетона, координат поперечного сечения элементов) отношение значений модуля упругости при растяжении и сжатии одного и того же состава бетона может изменяться в довольно широких пределах – от 0,71 до 1,82 (см. выше, а также работу [3]).

На основе вышеизложенного можно констатировать, что оптимальному проектированию изгибаемых, внецентренно сжатых и внецентренно растянутых железобетонных конструктивных элементов в существенной мере может способствовать учёт истинных величин модулей упругости бетона при растяжении и сжатии. В результате, можно в значительной мере уменьшить количество коэффициентов условий работы бетона, приведённых в строительных нормах [1] и учитывающих особенности механических свойств бетона, условия и стадию работы конструкций, способ их изготовления, размеры сечения и т.п., а также уточнить их значения. Практическое осуществление вышесказанного требует тщательной систематизации соответствующих известных результатов, а также выполнение новых, целенаправленных исследований.

Среди допущений при построении теории линейно деформируемых разномодульных материалов [11,12], также предполагается, что рассматриваемое тело обладает свойствами однородности и изотропности, которые выражаются особым образом. А именно, материал, обладающий во всех точках одинаковыми свойствами, одновременно проявляет различные прочностные и упругие свойства в зависимости от знака напряжений в данной точке.

Выше было высказано мнение, что соответствующим подбором связующего и природных вулканических наполнителей можно получить цементные легкие бетоны, которые будут очень близки к однородному материалу.

Представленные же в настоящей статье данные показывают, что в зависимости от ряда факторов, значение отношения модулей упругости при растяжении и сжатии одного и того же состава легкого бетона на природных пористых заполнителях может изменяться в довольно широких пределах – от 0,7 до 1,6. Приведены также закономерности изменения указанных зависимостей, которые могут позволять варьированием упомянутыми выше факторами получить бетоны с заранее заданными значениями отношения модулей упругости при растяжении и сжатии.

На основе вышеизложенного можно утверждать, что легкий бетон на природных пористых заполнителях вполне пригоден для использования его с целью экспериментальной проверки теоретически полученных результатов в области линейной теории упругости разномодульных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Строительные нормы и правила. Часть II. XНормы проектирования. Глава 21. Бетонные и железобетонные конструкции. (СХиП 2.03.01-84*). М.: Стройиздат, 1998. 77с.
2. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: ГИЗ технико-теоретической литературы, 1952. 323с.
3. Карапетян К.С., Котикян Р.А. Исследование разномодульности бетона//Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.68-77.
4. Карапетян К.А. Вопросы прочности и реологии бетонов. Ереван.: «Гитутюн», НАН РА, 2012. 256с.
5. Карапетян К.А. Влияние десорбции химически несвязанной влаги на механические свойства бетона при кратковременных силовых воздействиях //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №3. С.70-77.
6. Лешинский М.Ю. Испытание бетона. Справочное пособие. М.: Стройгиздат, 1980. 360с.
7. Карапетян К.С. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона при сжатии и растяжении //Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т.38. №3. С.135-142.
8. Карапетян К.А. О неоднородности прочности и деформационных свойств легкого бетона с учетом возраста //Информационные технологии и управление. 4. Материалы международной конференции: Прикладные и математические аспекты естествознания. Ереван: Ноян тапан. 1999. С.35-38.
9. Карапетян К.С., Карапетян К.А. Исследование неоднородности прочности, модуля деформации и ползучести бетонного элемента //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1983. Т.36. №2. С.37-53.
10. Карапетян К.С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от величины напряжения //Докл. АН Арм.ССР. 1964. Т.39. №1. С.13-20.
11. Амбарцумян С.А. Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1966. Т.19. №2. С.3-19.
12. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию //Инженерный журнал МТТ. 1966. №6. С.44-53.
13. Ацагорцян З.А. Природные каменные материалы Армении. М.: Изд. Лит. по строительству, 1967. 239с.

Сведения об авторе:

Карапетян Корьюн Ашотович, доктор технических наук,
зав. Лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН РА.
Адрес: 0019 Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2,
Тел.: (374 10) 52 48 52. **E-mail:** koryan@mechins.sci.am

К УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: анизотропия, слоистость, неоднородность начально направленного состояния, критические параметры.

Key words: anisotropy, lamination, initial stressed state nonhomogeneity, critical parameters.

Movsisyan L.A.

About stability of anisotropic laminated plates and cylindrical shells

Abstract. For the problem of stability of a plate under homogeneous compression there is a pair of boundary conditions under which the same critical values are obtained. However, under uneven compression, a completely different picture is obtained. The same picture occurs also for a cylindrical shell at normal pressure.

Аннотация: Для задачи устойчивости пластинки при однородном сжатии имеется пара граничных условий, при которых получаются одинаковые критические значения. Однако, при неравномерном сжатии получается совершенно другая картина. Такая же картина имеет место и для цилиндрической оболочки при нормальном давлении.

Введение. В классической постановке уравнение устойчивости балки при различных граничных условиях допускает одинаковые значения для критических сил, хотя по различным формам потери устойчивости.

Такая картина будет и для задачи устойчивости пластинки. В обоих случаях такой результат получается при однородном начальном напряжённом состоянии. Однако, уже при неоднородном начальном состоянии картина будет совершенно различной. В [1] такая задача рассмотрена для балки.

При произвольном составлении многослойных анизотропных пластин и оболочек даже из ортотропных слоёв, полученные системы уравнений не допускают метода разделения переменных. В [2] для плоской задачи, а в [3] для устойчивой пластинки ставится вопрос расположения слоёв таким образом, чтобы полученные уравнения допускали разделение переменных, а заодно, ставился вопрос о таком расположении, при котором получаются экстремальные значения критических параметров [3]. Ниже для таких пластин и цилиндрических оболочек рассматриваются задачи устойчивости с неоднородными начальными напряжёнными состояниями. Слои симметрично расположены относительно срединной координатной плоскости.

1. Постановка задачи. Уравнение устойчивости слоистой пластинки (с учётом, что слои расположены так, что $D_{16} = D_{26} = 0$) сжатой в одном направлении [4]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_i^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.1)$$

Для прямоугольной пластинки будем изучать два типа граничных условий – свободное опирание по всему контуру

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x=0, a; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, b$$

$$w = \sum_{m,n} f_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$

и так называемая «плавающая заделка» [5] на двух противоположных сторонах:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \text{ при } y = 0, b, \quad w = \sum_{m,n} f_{mn} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y$$

Что касается начального состояния, таких также два случая:

$$T_1^0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x$$

$$T_1^0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos \mu_k y$$

Предполагается, что края $y = 0$ и $y = b$ свободные – $T_2^0 = T_{12}^0 = 0$

В соответствии с этим, для определения критических усилий из (1.1)–(1.5) получим системы, соответственно:

$$\left[D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + D_{22} \mu_n^4 \right] f_{mn} + L_i(f_{pq}) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$$L_1(f_{pn}) = \lambda_m^2 \left(a_0 \pm \frac{a_{2m}}{2} \right) f_{mn} + \frac{1}{2} \lambda_m \left[\sum_{p=i}^{m-1} \lambda_p (a_{m-p} \pm \right.$$

$$\left. \pm a_{m+p}) f_{pn} + \sum_{p=m+1}^{\infty} \lambda_p (a_{p-m} \pm a_{m+p}) f_{pn} \right]$$

$$L_2(f_{mq}) = \lambda_m^2 \left\{ \left(b_0 \mp \frac{b_{2m}}{2} \right) f_{mn} + \frac{1}{2} \left[\sum_{q=1}^{n-1} (b_{n-q} \mp b_{n+q}) f_{mq} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{q=n+1}^{\infty} (b_{q-n} \mp b_{n+q}) f_{mq} \right] \right\}$$

Критические значения нагрузки получатся из условия разрешимости системы (1.6). Из (1.4)–(1.6) видно, что при однородном начальном состоянии критические значения параметров для обоих случаев граничных условий одинаковые. В (1.7) знак плюс относится к (1.2), а минус – к (1.3), а в (1.8) – наоборот.

Что касается продольного усилия, для него также рассматриваются два случая как (1.4) и (1.5)

Если внешнее сосредоточенное напряжение действует на расстоянии $x = x_1$ от одного из концов пластинки, т.е.

$$T_0^0 = \begin{cases} -P, & 0 < x < x_1, & a_0 = -P \frac{x_1}{l} \\ 0, & x_1 < x \leq 1, & a_k = -P \frac{2}{k\pi} \sin \lambda_k x_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Второй случай такой.

На сторонах $x = 0$ и $x = a$ продольное усилие

$$T_1^0 = P \left[1 + \delta \frac{4y}{b^2} (b - y) \right] \quad (1.10)$$

$$b_0 = 1 + \frac{2}{3} \delta, \quad b_n = \frac{16}{\pi^2} \delta \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

При равномерном сжатии минимальное критическое значение получается [4]

$$\bar{P}_{kp} = \frac{2\pi^2}{b^2} \left(\sqrt{D_{11}D_{22}} + D_{12} + 2D_{66} \right) \quad (1.11)$$

которое достигается в точках $\frac{a}{b} = m^4 \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}$.

Так как слоистую пластинку можно получить, располагая слои по толщине произвольным образом (поворотом главных осей упругости относительно координатной системы), то, естественно, возникает вопрос о наилучшем расположении с точки зрения получения желательных значений для критических параметров – типичная задача условного экстремума (условия $(D_{i6} = 0)$

В общем случае анизотропии невозможно аналитически получить выражения P_{kp} .

Для частного случая анизотропии $A_{11} = A_{22}$ экстремальные значения

$$P_{kp} = \frac{n^3 \pi^2 h^3}{3b^2} A_{11}, \quad P_{kp} = \frac{n^3 \pi^2 h^3}{6b^2} (A_{11} + A_{12} + 2A_{66}) \quad (1.12)$$

В зависимости от величин A_{ij} максимумы и минимумы получатся при $\varphi_k = 0$ и $\varphi_k = \pi/4$. Вот некоторые данные относительных критических значений P / P_{kp} (P_{kp} по 1.11) задачи (1.9):

$$\begin{array}{ll} 10,64; & 76,42 \quad (8x_1 = a) \\ 2,44; & 4,22 \quad (4x_1 = a) \end{array} \quad (1.13)$$

Первый столбец относится к (1.2), а второй – к (1.3).
Такие же данные для задачи (1.10).

δ	0.5	1	1.5
$+b_m$	0.811	0.683	0.589
$-b_m$	0.697	0.535	0.507

Приведённые данные показывают, что чем больше неоднородность начального напряжённого состояния, тем больше отличаются соответствующие критические параметры, в то же время критические параметры для случая (1.3) больше, чем для (1.2).

2. При сделанных предположениях относительно расположения слоёв, система уравнений устойчивости цилиндрической оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\
(C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\
D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \left[C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
\left. + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2^0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Рассмотрены два типа граничных условий. Для первого $T_1 = M_1 = v = w = 0$:

$$\begin{aligned}
w &= \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin \lambda_m x, \quad u = \cos \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m \cos \lambda_m x \\
v &= \sin \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \mu_n = \frac{n}{R}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

и второй тип $T_{12} = N_1 = w' = u = 0$:

$$w = \cos \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos \lambda_m x, \quad u = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \sin \lambda_m x, \quad v = \sin \mu_n y \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m \cos \lambda_m x \tag{2.3}$$

Первые – обычные условия свободного опирания, а вторые – так называемая «плавающая заделка» [5].

Если начальные усилия T_1^0 и T_2^0 также представить в виде рядов:

$$T_2^0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x, \quad T_1^0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos \lambda_k x, \tag{2.4}$$

то с учётом условий (2.2) и (2.3), из (2.9) для определения f_m, φ_m и ψ_m получится бесконечная однородная система, откуда и определяются критические нагрузки.

Начальные усилия T_1^0 и T_2^0 в общем случае определяются из системы одномерных уравнений:

$$C_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + C_{12} \frac{1}{R} \frac{dw_0}{dx} = 0$$

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{1}{R} \left(C_{12} \frac{du_0}{dx} + C_{22} \frac{w_0}{R} \right) = Z(x) \quad (2.5)$$

Для граничных условий типа (2.3) решение (2.5) ищем в виде

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \lambda_n x, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos \lambda_n x, \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x \quad (2.6)$$

Тогда

$$T_1^0 = -\frac{C_{12}}{C_{11}} Ra_0, \quad T_2^0 = -Ra_0 + R \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{1 + X_m} \cos \lambda_m x \quad (2.7)$$

где

$$X_m = \frac{D_{11} R^2}{C} \lambda_m^4, \quad C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{22}} \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что если Z не сильно меняются по X и оболочка достаточно тонкая, то параметрические члены в системе уравнений устойчивости можно брать из решения безмоментной задачи.

$$T_1^0 = -\frac{C_{12}}{C_{11}} Ra_0, \quad T_2^0 = -R \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \lambda_m x \quad (2.9)$$

Такая же картина имеет место и для условий (2.2).

При постоянном давлении его критическое значение и число волн в поперечном направлении

$$\bar{q}_{kp} = 5.51 \frac{1}{Rl} \sqrt[4]{D_{22}^3 \frac{C}{R^2}}$$

$$n^2 = 5.44 \frac{1}{Rl} \sqrt[4]{\frac{R^2 C}{D_{22}}} \quad (2.10)$$

Ради только краткости записи, если предположить, что оболочка очень тонкая, упругие коэффициенты не очень отличаются друг от друга и действующее внешнее давление также не очень меняется по длине, то определение значения критического давления сводится к следующей системе:

$$\left(D_{22} \mu_n^2 + \frac{\lambda_m^2}{R^2} \frac{C}{\lambda_n^6} \right) f_m - \left(b_0 \pm \frac{b_{2m}}{2} \right) f_m -$$

$$-\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{m-1} f_k (b_{m-n} \pm b_{m+n}) + \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k (b_{k-m} \pm b_{k+m}) \right] = 0 \quad (2.11)$$

Здесь $-b_m = Ra_m$ и в сделанных предположениях влияние члена от T_1^0 пренебрежимо мало, знак минус относится к (2.2), а плюс – к (2.3). Кстати, и из (2.11) видно,

что при равномерной нагрузке оба случая граничных условий дают одинаковые значения для критического давления.

В качестве примера рассмотрим задачу, аналогичную приведённой в первом пункте

$$Z = -q \left[1 + \delta \frac{4}{l^2} (lx - x^2) \right], \quad T_2^0 = RZ \quad (2.12)$$

Ниже приводятся некоторые данные для отношений $q_{кр} / \bar{q}_{кр}$ ($\bar{q}_{кр}$ – по (2.10)).

δ	0,25	0,5	0,75	1	0
–	0.821	0.798	0.653	0.535	1
+	0.896	.812	0.742	0.683	1

Естественно, прибавление неоднородности нагрузки уменьшает значение относительного критического давления, в то же время для (2.2) сравнительно больше, чем (2.3).

Заключение. Есть пара граничных условий, когда задача устойчивости для пластинки, при равномерном сжатии в ее плоскости и цилиндрической оболочки при внешнем нормальном давлении, дают одинаковые значения для критических параметров. При неоднородном начальном напряженном состоянии совершенно различными получаются искомые параметры. Приведены решения таких задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. К устойчивости вязкоупругих балок и цилиндрических оболочек. Изв. НАН Армении. Механика. 2015, т.68. №4. С.38-45. Movsisyan L.A., Nersisyan G.G. About stability of viscoelastic bars and cylindrical shells (in Rus). Izv. ANA. Mechanica. 2015. V.68.N4.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М. „Мир”. 1982. 334с. Ghristensen R.M. Mechanics of composite materials. М. „Mir”. 1982-334 p.
3. Мовсисян Л.А. К устойчивости упругой и вязкоупругой анизотропной многослойной пластинки. Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1990, т.43. №4, с.3-13. Movsisyan L.A. On stability of elastic and viscoelastic anizotropic mutilayered plate (in Rus) Izv ANA „Mechanica” 1990. V.43, N4
4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки ГИТТЛ. М. 1957. 463 г. Lexnitsky S.G. Anisotropic plates. М.1957. 463 p. (in Rus.).
5. Вибрация в технике. Т.1.М. Машиностроение. 1978. 352 с. Vibrations in thectic. (in Rus.). М.1978. 382 p.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович

Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА

Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24/2.

Тел.: (+37410). 56821

E-mail: mechins@sci.am

О ВОЛНАХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Саркисян С.В.

Key words: elastic half-space, surface wave, elastically restrained boundary

Ключевые слова: упругое полупространство, поверхностная волна, упруго-стеснённая граница

Sarkisyan S.V.

On waves in a half-space with mixed boundary conditions

Abstract. In this paper we obtained the dispersion equations of the three-dimensional wave propagation problem in a half-space with mixed boundary conditions. Three-dimensional surface wave exists only for two kinds of boundary conditions - when the surface of half-space is free from the stresses and the free surface is restrained. In the second case, three-dimensional wave has the dispersion property and the wave propagation angle affects the phase velocity.

Аннотация. В настоящей работе получены дисперсионные уравнения трёхмерной задачи о распространении волн в полупространстве со следующими граничными условиями: граница полупространства свободна от напряжений, на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении. Трёхмерная поверхностная волна (3DSW) существует, когда поверхность полупространства свободна от напряжений и когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений. Во втором случае 3DSW обладает свойством дисперсии и угол распространения волны оказывает влияние на фазовую скорость.

Введение. Впервые о существовании поверхностных волн было указано Рэлеем [1], где рассмотрена задача плоской деформации для полупространства со свободной от напряжений границей. Решение трёхмерной задачи, обобщающая задачу Рэлея, получена Ноулсом [2]. Эти результаты приведены в монографии [3]. Другой вариант пространственной задачи исследован в [4]. В работе [5] исследованы трёхмерные задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства: свободная граница и когда на границе полупространства одно касательное перемещение, один из касательных напряжений и нормальное напряжение равны нулю. В монографии [6] приведён обзор по пространственным задачам распространения упругих волн. Исследование трёхмерных поверхностных волн для различных типов смешанных граничных условий на поверхности полупространства проведено в работе [7]. Показано, что дисперсионное уравнение имеет корень для двух типов граничных условий: свободная поверхность и поверхность, где запрещены перемещения в одном из касательных направлений. В работах [8-10] предложен асимптотический метод, позволяющий построить асимптотическое приближение решения, описывающего цилиндрическую поверхностную волну в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространства.

В отличие от классической задачи Рэлея, вместо граничных условий свободной поверхности для упругого изотропного полупространства М.В.Белубекианом [11] рассмотрены два варианта усложнённых граничных условий. Предполагается, что либо нормальное напряжение стеснено в направлении перпендикулярной к поверхности нормали, а касательное равно нулю, либо нормальное напряжение равно нулю, а касательное стеснено. Устанавливаются условия, при которых поверхностная

волна не может существовать. Пространственные задачи динамической теории упругости в результате применения интегрального преобразования Радона [12] сводятся к плоской задаче относительно образов преобразования Радона. В работе [13] исследован вопрос введения динамических потенциалов для решения трёхмерных задач динамической теории упругости, в которых не используется анти-плоское движение (например, в задаче приповерхностной динамики упругого полупространства, когда вклад поверхностной волны доминирует). Применяв преобразование Радона, решение трёхмерной задачи теории упругости сводится к решению соответствующей плоской задачи. Развитие асимптотических моделей поверхностной волны Рэлея, интерфейсных волн Стоунли и Шольте-Гоголадзе исследовано в работе [14]. В работе [15] исследована задача распространения волны в упругом полупространстве, когда на границе полупространства заданы условия стеснённого свободного края. Используя интегральное преобразование Радона, получено дисперсионное уравнение для определения скорости распространения поверхностной волны и проведён численный эксперимент для разных физико-механических параметров, характеризующих среду.

В настоящей работе получены дисперсионные уравнения трёхмерной задачи о распространении волн в полупространстве со следующими граничными условиями:
а) граница полупространства свободна от напряжений,
б) на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений,
в) на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении.

Исследование задачи упрощается введением потенциальных функций по аналогу с задачами плоской деформации [5]. Трёхмерная поверхностная волна (3DSW) существует, когда поверхность полупространства свободна от напряжений и когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений. Во втором случае 3DSW обладает свойством дисперсии и угол распространения волны оказывает влияние на фазовую скорость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропное упругое полупространство, которое в прямоугольной декартовой системе координат $(Oxyz)$ занимает область:

$\Omega \{ -\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty, -\infty < z < \infty \}$. Для уравнения распространения упругих волн в изотропной среде (уравнение Ламе)

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (1.1)$$

введём следующее преобразование:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.2)$$

где $\vec{u}$ – вектор перемещения, λ, μ – параметры Ламэ, ρ – объёмная плотность.

Это преобразование такое же, что и для задачи плоской деформации в плоскости (Oxy) [1]. Преобразование (1.2) было применено в [2] для трёхмерной задачи статики пьезоактивной среды, в [5] при исследовании задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства. Подставляя (1.2) в уравнение (1.1), для

потенциальных функций $\varphi(x, y, z, t)$ и $\psi(x, y, z, t)$ получим следующие уравнения:

$$c_t^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

$$\left(\Delta - c_t^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta \varphi - c_l^{-2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1.3)$$

При помощи (1.2) и (1.3) перемещения u, v, w и потенциальные функции φ, ψ с учётом условий затухания $\lim_{y \rightarrow \infty} \vec{u} = 0, \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi = 0, \lim_{y \rightarrow \infty} \psi = 0$ определяются в виде [5]:

$$u(x, y, z, t) = -i \left[Ak \cos \gamma e^{-v_1 k y} + (Bk \cos \gamma + Ck \sin \gamma) e^{-v_2 k y} \right] \exp i(\omega t - xk \cos \gamma - zk \sin \gamma),$$

$$v(x, y, z, t) = -k \left[Av_1 e^{-v_1 k y} + Bv_2^{-1} e^{-v_2 k y} \right] \exp i(\omega t - xk \cos \gamma - zk \sin \gamma),$$

$$w(x, y, z, t) = -i \left[Ak \sin \gamma e^{-v_1 k y} + (Bk \sin \gamma - Ck \cos \gamma) e^{-v_2 k y} \right] \exp i(\omega t - xk \cos \gamma - zk \sin \gamma),$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \left[Ae^{-v_1 k y} + Be^{-v_2 k y} \right] \exp i(\omega t - xk \cos \gamma - zk \sin \gamma),$$

$$\psi(x, y, z, t) = Ce^{-v_2 k y} \exp i(\omega t - xk \cos \gamma - zk \sin \gamma), \quad (1.4)$$

где k – волновое число, $v_1 = \sqrt{1 - \theta \eta}$, $v_2 = \sqrt{1 - \eta}$, $\theta = \frac{c_t^2}{c_l^2} < 1$, $\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_l^2} < 1$ –

безразмерная фазовая скорость трёхмерной поверхностной волны, γ – острый угол распространения волны в плоскости Oxz ; A, B и C – произвольные постоянные.

Пусть на границе полупространства $y = 0$ заданы следующие граничные условия.

1. Граница полупространства $y = 0$ свободна от напряжений:

$$\sigma_{yy} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{yx} = 0 \quad (1.5)$$

2. На границе полупространства $y = 0$ запрещено перемещение в одном из касательных направлений:

$$\sigma_{yy} = 0, \sigma_{yz} = 0, u = 0 \quad (1.6)$$

3. На границе полупространства $y = 0$ запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении

$$v = 0, u = 0, \sigma_{yz} = 0 \quad (1.7)$$

С использованием закона Гука и преобразования (1.2) граничные условия (1.5)-(1.7) приводятся к виду:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0, \quad (1.5a)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0, \quad (1.6a)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$v = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (1.7a)$$

2. Дисперсионные уравнения и численные результаты. Удовлетворяя решение (1.4) граничным условиям (1.5a), (1.6a) и (1.7a), из условия существования нетривиального решения системы однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A, B и C получаем следующие дисперсионные уравнения:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma) \left((2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \eta\theta)} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \eta\theta)} - \eta(1 - \eta) \operatorname{ctg}^2 \gamma = 0 \quad (2.2)$$

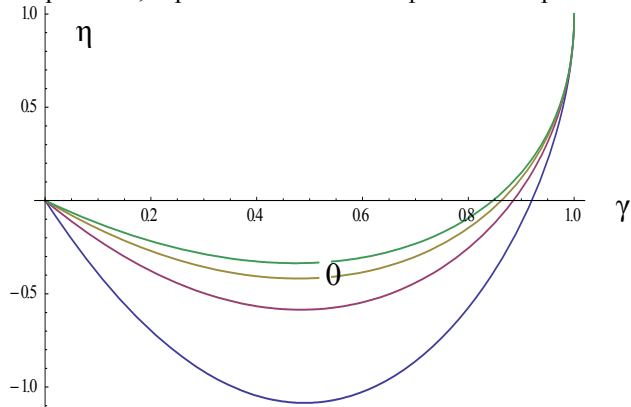
$$\eta\sqrt{1 - \theta\eta} + \operatorname{ctg}^2 \gamma \sqrt{1 - \eta} \left(1 - \sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)} \right) = 0 \quad (2.3)$$

В случае, когда поверхность полупространства свободна от напряжений, получается известное уравнение Рэлея (2.1). Если же, на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений (стеснённая свободная поверхность) дисперсионное уравнения сводится к уравнению (2.2). В данном случае это уравнение имеет единственный корень $\eta < 1$ и трёхмерная поверхностная волна (3DSW) обладает свойством дисперсии. На фиг. 1 представлена зависимость фазовой скорости 3DSW от угла распространения γ при $\theta = 0.33$. Когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений и в нормальном направлении, дисперсионное уравнение (2.3) относительно безразмерной фазовой скорости 3DSW не имеет корень, удовлетворяющий условию $\eta < 1$. Как видно из фиг.1, если на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений, то с убыванием угла распространения волны γ значение фазовой скорости η 3DSW возрастает. При $\gamma = \pi / 2$ значение фазовой скорости 3DSW в точности совпадает со значением фазовой скорости поверхностной волны Рэлея.

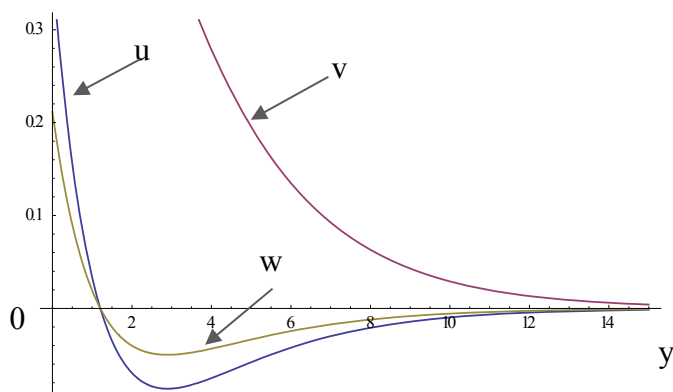
Проведены численные исследования дисперсионных уравнений (2.1) и (2.2) при разных значениях угла распространения волны γ . На фиг. 2-6 представлены результаты расчёта формы трёхмерной поверхностной волны ($\theta = 0.33$). Графики показы-

вают, что в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений, угол распространения волны оказывает влияние на скорость затухания напряжённо-деформированного состояния при удалении от поверхности. При $\gamma = \pi / 2$ 3DSW в точности переходит в поверхностную волну Рэлея.

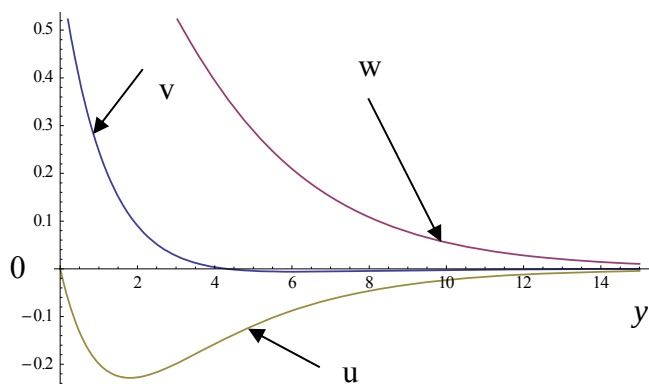
Заключение. Трёхмерная поверхностная волна (3DSW) существует лишь для двух видов граничных условий, когда поверхность полупространства свободна от напряжений и когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений (стеснённая свободная поверхность). В случае стеснённой свободной поверхности 3DSW обладает свойством дисперсии. Угол распространения волны оказывает влияние на фазовую скорость трёхмерной поверхностной волны. С убыванием этого угла значения фазовой скорости 3DSW возрастают, стремясь к значению фазовой скорости поверхностной волны Рэлея.



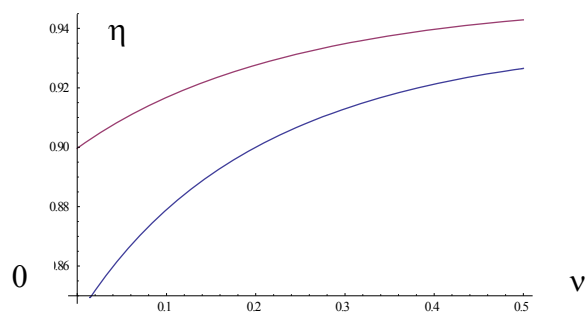
Фиг.1 График зависимости безразмерной фазовой скорости η 3DSW от угла распространения γ .



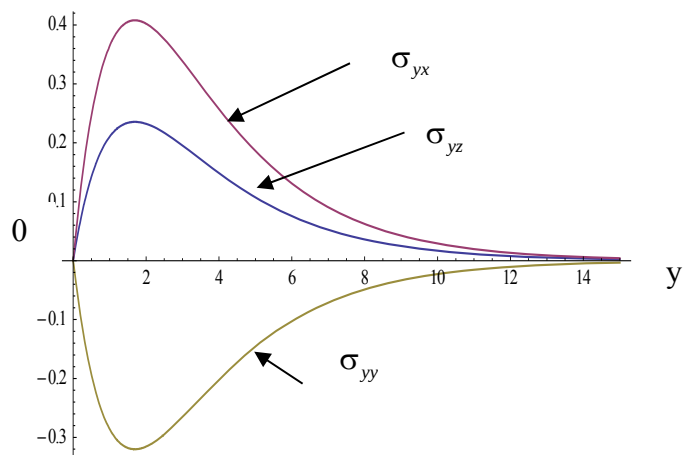
Фиг.2. График зависимости перемещений u, v, w от угла распространения $\gamma = \pi / 6$ в случае свободной границы.



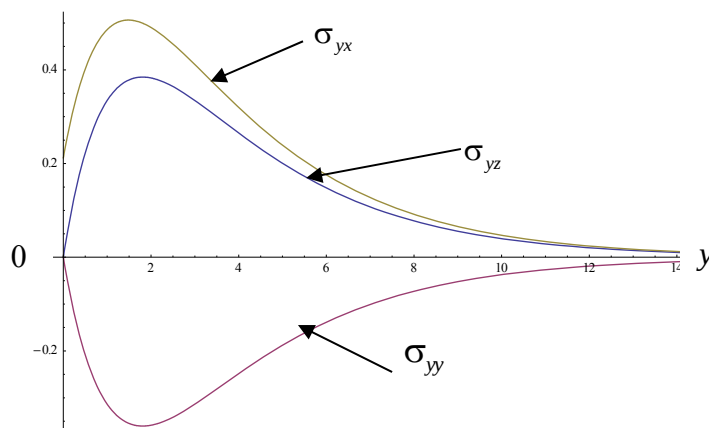
Фиг.3. График зависимости перемещений u, v, w от угла распространения $\gamma = \pi / 4$ в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений.



Фиг.4. График зависимости фазовой скорости от угла распространения $\gamma = \pi / 4, \pi / 3$ при различных значениях коэффициента Пуассона в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений.



Фиг.5. Форма поверхностной волны в случае свободной границы при угле распространения $\gamma = \pi / 3$.



Фиг.6. Форма поверхностной волны в случае, когда на границе полупространства запрещено перемещение в одном из касательных направлений при угле распространения $\gamma = \pi / 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid //Proc.Lond.Math.Soc. 1885, v.17, N253, p.4-11.
2. Knowles J. K., A note on surface waves // J. of Geophys. Res. 1966, vol. 21, № 22, p. 5480-5481.
3. Achenbach J. D., Wave propagation in elastic solids. North-Holland, 1984, 425 p.
4. Белубекян В. М., К задаче о поверхностных упругих волнах в толстой плите// Изд. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №1. С.9-15.// Belubekyan V. M., On the elastic surface waves in a thick plate // Mechanics. Proc. Nat. Acad. Sci. Arm, 1995, 48 (1), p. 9-15. (Russian).
5. Белубекян В. М., Белубекян М. В., Трехмерная задача поверхностных волн Рэлея // ДНАН Армении, 2005, т.105, № 4, с. 362-369.// Belubekyan V. M., Belubekyan M. V., Three-dimensional problem of Rayleigh wave propagation // NAS RA Repors, 2005, v. 105 (4), p. 362-369 (Russian).
6. Абрамян Б. Л. Пространственные задачи теории упругости. Ереван. Изд. НАН Армении, 1998. 275 с.// Abrahamyan B. L., Surface problems of elasticity theory. Yerevan, Academy of Sciences of Armenia, 1998. 275 p. (in Russian).
7. Ардазишвили Р. В., Трехмерная волна Рэлея в случае смешанных граничных условий на поверхности полупространстве // Сб. науч. тр. межд. конф. «Механика», посв. 70-летию основания НАН Армении, Цахкадзор, 2013, с.74-78.// Ardazishvili R.V. Three-dimensional Rayleigh wave in the case of mixed boundary conditions on the surface of half-space. Proceedings of International School-Conference of Young Scientists dedicated to the 70th of the National Academy of Sciences of Armenia «Mechanics 2013», 1-4 October, Tsakhkadzor, 2013, p. 74-78 (in Russian).
8. Vilde M.V. Higher order edge waves in a hollow cylinder with mixed boundary conditions at the end face // XI Russian conference of fundamental problems of theoretical and applied mechanics: Proceedings Kazan: Kazan federal university press, 2015. pages 752-754 (CD-ROM).

9. Ardazishvili R.V., Vilde M.V., Kossovich L.Y. Three-dimensional fundamental edge waves in thin shell // Vestnik ChSPY after I.Yakovlev. Seria: limit conditions mechanics. 2015, N4 (26) с.109-124.
10. Vilde M.V., Asymptotic approach for cylindrical surface wave in elastic half-space with mixed boundary conditions on the surface.// Works of 18th international conference, Rostov-on Don, v. 1, 2016, pages 130-134.
11. Белубекян М.В. Волна Рэлея в случае упруго–стесненной границы. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №4. С. 3–6. // Belubekyan M. V., The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary // Mechanics. Proc. Nat. Acad. Sci. Arm., 2011, vol. 64 (4), p. 3-6 (Russian).
12. Georgiadis H. G., Lykotrafitis G., A method based on the Radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads // Journal of Elasticity, 2001, vol. 65. pp. 87-129.
13. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости // Вестник МГТУ им. Баумана, Естественные науки, 2012, с. 131-137.// Prikazchikov D. A., Kovalenko E. V., Selection of potential problems in three-dimensional dynamic theory of elasticity // MSTU after Bauman, Natural Science, 2012, p. 131-137 (Russian).
14. Приказчиков Д.А. Развитие асимптотических моделей поверхностных и интерфейсных волн // МТТ, Вест. Нижегородского ун-ва. Им. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1713-1715.// Prikazchikov D.A., Development of asymptotic models of surface and interface waves // МТТ, Nijni Novgorod University after Lobachevsky, 2011, vol. 4 (4), p. 1713-1715 (Russian).
15. Мелконян А.В., Саркисян С.В. Применение интегрального преобразования Радона в задаче о распространении волн в полупространстве// Труды межд. школы-конференции, 2013, Ереван, с. 181-184.// Melkonyan A.V., Sarkisyan S.V., Application of Radon integral transform in wave propagation problems for half-space. Proceedings of International School-Conference of Young Scientists dedicated to the 70th of the National Academy of Sciences of Armenia “Mechanics 2013”, 1-4 October, Tsakhkadzor, 2013, Yerevan, p. 181-184 (Russian).

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ.- мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, факультета математики и механики ЕГУ, (374 55) 73 13 13,6; **E-mail:** vas@ysu.am.

**О ПАРАДОКСЕ В ПОВЕДЕНИИ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ
СИЛ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ
ПРИЛОЖЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ**
Сейранян С.П.

Ключевые слова: прямоугольная, пластина, сосредоточенная, сила, перерезывающие, парадокс.
Key words: rectangular, plate, concentrated, force, cutting, paradox.

Սեյրանյան Մ.Պ.

**Ուղղանկյուն կենտրոնացված ուժով բեռնավորված սալի բեռնավորման
կետի շրջակայքում կտրող ուժերի պարադոքսային վարքի մասին**

Դիտարկվում է ուղղանկյուն հողակապրեն հիմնված և կենտրոնացված ուժով բեռնավորված Կիրխոֆի սալը: Հետազոտվում է սալում առաջացող կտրող N_x , N_y ուժերի սահմանային վարքը կենտրոնացված ուժի կիրառման (ξ, η) կետի շրջակայքում, երբ կատարվում է (ξ, η) կետին մոտեցումը տարբեր կողերով: Գտնվել են կողեր, որոնցով մոտեցումը բերում է վերջավոր կամ անվերջ սահմանային մեծությունների: Նշված վարքը N_x , N_y ֆիզիկական մեծությունների իզոտրոպ սալում չի պարունակում ֆիզիկական բացատրություն և ներկայացնում է որպես պարադոքս:

Seyranyan S.P.

**On the paradox in the behavior of the cutting forces in a rectangular plate in
the neighborhood of a point of application of a concentrated force**

The Kirchhoff simply supported rectangular plate under concentrated force is considered. The limiting behavior of the cutting forces N_x , N_y in the plate near the point (ξ, η) of application of concentrated force is studied when we approach to the point (ξ, η) along the different curves. Different curves are found, the movement on which leads to different finite or infinite limits. The observed behavior of the physical quantities N_x , N_y in an isotropic plate does not contain physical explanation and is a paradox.

Рассматривается прямоугольная пластина Кирхгофа, шарнирно опёртая по торцам, нагружённая поперечной сосредоточенной силой. Исследуется предельное поведение перерезывающих сил N_x , N_y в пластине в окрестности точки (ξ, η) приложения сосредоточенной силы при приближении к (ξ, η) по некоторым кривым. Найдены различные кривые, приближение по которым приводит к различным как конечным, так и бесконечным предельным значениям. Отмеченное поведение физических величин в изотропной пластине не содержит физического объяснения и представляется парадоксом.

Известно, что в краевых задачах механики встречаются парадоксы, которые связаны с нарушением физически обусловленной непрерывной зависимости решений от параметров задачи. В качестве таковых выступают, например, парадокс Циглера [1] и парадокс Бабушки – Сапонджяна [2]. Поэтому решение той или иной задачи, полученное, или же, тем более, сформулированное из ограниченных физических соображений с применением предельного перехода (например, обобщённые решения [3 – 5] и др.), требует дальнейшего его анализа на непротиворечивость. К таковым решениям принадлежит и решение Навье для прогиба свободно опёртой прямоугольной пластины при сосредоточенной нагрузке [6]. Названное решение Навье определил предельным переходом в им же полученном решении для прогиба данной, но нагружённой равномерным давлением пластины по прямоугольнику той же ориентации, что и прямоугольный план пластины, при устремлении сторон прямоугольника приложения нагрузки к нулю, когда результирующая сила постоянна. При этом, ни Навье, ни его последователи, до автора настоящей работы [7] – [9] вопрос о существовании предельных значений прочих величин НДС пластины не рассматривали.

Прежде автором настоящей работы в [7] получен следующий результат: вторая смешанная частная производная от прогиба шарнирно опёртой прямоугольной пластины при сосредоточенной нагрузке теряет непрерывность в точке её приложения

(ξ, η) , как функция двух переменных: найдены различные кривые, приближение по которым к точке (ξ, η) с предельным переходом приводит к различным конечным предельным значениям. Содержится вывод, что отмеченное поведение величины, пропорциональной крутящему моменту – распределённой физической величине – в изотропной пластине представляется парадоксом.

Далее, в работе [10] предельным переходом от локально нагруженной по прямоугольнику равномерным давлением нагрузки к сосредоточенной в выражениях для перерезывающих сил N_x, N_y при сохранении центра (ξ, η) приложения давления и результирующей нагрузки неизменными получены конечные предельные значения величин N_x, N_y . Содержится вывод, что конечные пределы величин N_x, N_y – парадокс.

В представленной работе – заключительной части доклада [11] – приводится анализ поведения перерезывающих сил в прямоугольной шарнирно опертой пластине при сосредоточенной нагрузке в окрестности точки её приложения с обнаружением парадокса.

1. О парадоксе в поведении перерезывающих сил в прямоугольной пластине в окрестности точки приложения сосредоточенной силы.

Решение Навье для шарнирно опертой прямоугольной пластины при сосредоточенной нагрузке в форме ординарного тригонометрического ряда [6] преобразуется к виду

$$\begin{aligned} w(x, y) &= P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [1 + \lambda_m b \operatorname{cth} \lambda_m b - \lambda_m (b-y) \operatorname{cth} \lambda_m (b-y) - \lambda_m \eta \operatorname{cth} \lambda_m \eta] \times \\ &\times \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} \{ \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m \times \\ &\times (b-y) + \lambda_m b [\operatorname{ch} \lambda_m b \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) / \operatorname{sh} \lambda_m b - \operatorname{ch} \lambda_m (b-y)] \operatorname{sh} \lambda_m \eta + \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \times \\ &\times \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) - \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) \} \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) = \\ &= P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) - b \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh} \lambda_m b + \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) - \\ &- \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, \eta \leq y \leq b \quad (1.1) \\ w(x, y) &= P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) - b \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta / \operatorname{sh} \lambda_m b + \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y \times \\ &\times \operatorname{ch} \lambda_m (b-\eta) - \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \eta \end{aligned}$$

Здесь нижняя часть формулы первоначально получена из верхней части перестановкой в ней величин y и η , что верно и в [6]. Величины a, b – длины сторон прямоугольника плана пластины, D и P – изгибная жёсткость пластины и сосредоточенная сила, ξ и η – координаты точки приложения сосредоточенной силы, $\lambda_m = m\pi/a$.

Вычисляя частные производные до третьего порядка почленным дифференцированием рядов (1.1) по x и y на множестве $G_\eta = [0, a] \times [0, b] \setminus \{y = \eta\}$, получаем

$$\partial^3 w(x, y) / \partial x^3 = -P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) - \lambda_m b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh} \lambda_m b +$$

$$+\lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) - \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y)] \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b$$

при $0 \leq x \leq a, \eta < y \leq b$ (1.2)

$$\partial^3 w(x, y) / \partial x^3 = -P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) - \lambda_m b \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta / \operatorname{sh} \lambda_m b +$$

$$+\lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m (b-\eta) - \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta)] \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b$$

при $0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \eta$

$$\partial^3 w(x, y) / \partial x^2 \partial y = -P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m y / \operatorname{sh} \lambda_m b - y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) +$$

$$+\eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y)] \lambda_m \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq a, \eta < y \leq b \quad (1.3)$$

$$\partial^3 w(x, y) / \partial x^2 \partial y = -P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m y / \operatorname{sh} \lambda_m b + \eta \operatorname{ch} \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m (b-\eta) -$$

$$-y \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta)] \lambda_m \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \eta$$

$$\partial^3 w(x, y) / \partial x \partial y^2 = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh} \lambda_m b - \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) / \lambda_m +$$

$$+y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) - \eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y)] \lambda_m \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b$$

при $0 \leq x \leq a, \eta < y \leq b$ (1.4)

$$\partial^3 w(x, y) / \partial x \partial y^2 = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta / \operatorname{sh} \lambda_m b + \eta \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m (b-\eta) -$$

$$-\operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) / \lambda_m - y \operatorname{ch} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta)] \lambda_m \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b$$

при $0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \eta$

$$\partial^3 w(x, y) / \partial y^3 = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} \{ \lambda_m [-b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m y / \operatorname{sh} \lambda_m b - y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) +$$

$$+\eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y)] + 2 \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) \} \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b$$

при $0 \leq x \leq a, \eta < y \leq b$ (1.5)

$$\partial^3 w(x, y) / \partial y^3 = P / (Da) \sum_{m=1}^{\infty} \{ \lambda_m [-b \operatorname{ch} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta / \operatorname{sh} \lambda_m b + \eta \operatorname{ch} \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m (b-\eta) -$$

$$-y \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta)] - 2 \operatorname{ch} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) \} \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / \operatorname{sh} \lambda_m b$$

при $0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \eta$

Тогда, подставляя (1.2) – (1.5) в выражения для перерезывающих сил [2], имеем:

$$N_x = -D \left(\partial^3 w(x, y) / \partial x^3 + \partial^3 w(x, y) / \partial x \partial y^2 \right) = 2P / a \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sh} \lambda_m \eta \times$$

$$\times \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq a, \eta < y \leq b \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
N_x &= -D \left(\partial^3 w(x, y) / \partial x^3 + \partial^3 w(x, y) / \partial x \partial y^2 \right) = 2P / a \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sh} \lambda_m y \times \\
&\times \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \eta \\
N_y &= -D \left(\partial^3 w(x, y) / \partial y^3 + \partial^3 w(x, y) / \partial x^2 \partial y \right) = -2P / a \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sh} \lambda_m \eta \times \\
&\times \operatorname{ch} \lambda_m (b - y) / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, \eta < y \leq b \\
N_y &= -D \left(\partial^3 w(x, y) / \partial y^3 + \partial^3 w(x, y) / \partial x^2 \partial y \right) = 2P / a \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{ch} \lambda_m y \times \\
&\times \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \eta
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta / \operatorname{sh} \gamma &= [\operatorname{ch}(\alpha + \beta) - \operatorname{ch}(\alpha - \beta)] / (2 \operatorname{sh} \gamma) = \{ (e^{\alpha+\beta} + e^{-(\alpha+\beta)}) / \\
&/ [2(e^\gamma - e^{-\gamma})] - e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2 \} + e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2 - \operatorname{ch}(\alpha - \beta) / (2 \operatorname{sh} \gamma) = [e^{-(\alpha+\beta)} + \\
&+ e^{\alpha+\beta-2\gamma} - 2 \operatorname{ch}(\alpha - \beta)] / (4 \operatorname{sh} \gamma) + e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2 = [e^{-\gamma} \operatorname{ch}(\gamma - \alpha - \beta) - \operatorname{ch}(\alpha - \beta)] / \\
&/ (2 \operatorname{sh} \gamma) + e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta / \operatorname{sh} \gamma &= \partial [\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta / \operatorname{sh} \gamma] / \partial \beta = [\operatorname{sh}(\alpha - \beta) - e^{-\gamma} \operatorname{sh}(\gamma - \alpha - \beta)] / \\
&/ (2 \operatorname{sh} \gamma) + e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Поэтому, с использованием (1.8) и (1.9), преобразуем общие члены в рядах (1.6) и (1.7). Переходя далее от суммирования слагаемых общего члена к суммированию каждого слагаемого, что допустимо, так как приводит с сходящимся рядом, получаем

$$\begin{aligned}
N_x &= P / a \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-\lambda_m b} \operatorname{ch} \lambda_m (y - \eta) - \operatorname{ch} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \times \right. \\
&\times \cos \lambda_m x + 1 / 2 I_s(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(\xi + x)) + 1 / 2 I_s(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(\xi - x)) \left. \right\} \\
&\text{при } (x, y) \in G_\eta = [0, a] \times ([0, \eta) \cup (\eta, b]),
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
N_y &= P / a \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-\lambda_m b} \operatorname{sh} \lambda_m (y - \eta) + \operatorname{sh} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \times \right. \\
&\times \sin \lambda_m x + 1 / 2 [I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(x+\xi)) - 1 / 2 I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(x-\xi))] \operatorname{sgn}(y-\eta) \left. \right\} \\
&\text{при } (x, y) \in G_\eta.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь [12] (т. II, стр. 430, 431)

$$I_s(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} r^m \sin m \theta = r \sin \theta / [(1-r)^2 + 4r \sin^2 \theta / 2] \tag{1.12}$$

$$I_c(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m\theta = \{(1-r^2) / [(1-r)^2 + 4r \sin^2 \theta / 2] - 1\} / 2 \quad (1.13)$$

где $0 < r < 1$,

$\operatorname{sgn}(t)$ – сигнум функция [12] (т. I, с. 115).

Исследуем далее ряды в (1.10), (1.11) на равномерную сходимость. Заметим, что в них при больших значениях m абсолютные величины слагаемых, из которых состоят коэффициенты при тригонометрических функциях, приближаются выражениями, для которых справедливы неравенства

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda_m b} \operatorname{ch} \lambda_m (y - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b \\ e^{-\lambda_m b} |\operatorname{sh} \lambda_m (y - \eta)| / \operatorname{sh} \lambda_m b \end{aligned} \right\} \approx \frac{e^{\lambda_m |y - \eta|}}{e^{2b\lambda_m}} \leq \begin{cases} e^{-\lambda_m (b + \eta)} \leq e^{-\lambda_m \eta} & \text{при } \eta < y \leq b \\ e^{\lambda_m (\eta - 2b)} \leq e^{-\lambda_m \eta} & \text{при } 0 \leq y < \eta \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda_m (b - y - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b \\ |\operatorname{sh} \lambda_m (b - y - \eta)| / \operatorname{sh} \lambda_m b \end{aligned} \right\} \approx \frac{e^{\lambda_m |b - y - \eta|}}{e^{b\lambda_m}} \leq \begin{cases} e^{-\lambda_m \eta} & \text{при } y + \eta \leq b \\ e^{\lambda_m (\eta - b)}, & \text{если } y + \eta > b \end{cases} \quad (1.15)$$

Пусть теперь $q = \max(e^{-\lambda_1 \eta}, e^{-\lambda_1 (b - \eta)})$. Тогда ряды (1.10), (1.11) мажорируются бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем q . Действительно, с использованием (1.14), (1.15) для общих членов рядов (1.10), (1.11) непосредственно получаем

$$\begin{aligned} & \left| [e^{-\lambda_m b} \operatorname{ch} \lambda_m (y - \eta) - \operatorname{ch} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x \right| \leq \\ & \leq e^{-\lambda_m b} \operatorname{ch} \lambda_m (y - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b + \operatorname{ch} \lambda_m (b - y - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b \leq E_1 q^m \\ & \left| [e^{-\lambda_m b} \operatorname{sh} \lambda_m (y - \eta) + \operatorname{sh} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \right| \leq \\ & \leq |e^{-\lambda_m b} \operatorname{sh} \lambda_m (y - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b| + |\operatorname{sh} \lambda_m (b - y - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b| \leq E_2 q^m \end{aligned}$$

Здесь E_1, E_2 – существующие по теории пределов положительные константы [12] (с. 61).

Значит, ряды в (1.10), (1.11) сходятся равномерно относительно переменных x и y в G_η [12] (т. II, с. 463). Но их общие члены имеют двойной предел при стремлении (x, y) к точке сгущения (ξ, η) множества G_η . Действительно, данные члены состоят из

суперпозиций конечного числа элементарных непрерывных функций x и y , изначально определённых на всей плоскости $X \times Y$, связанных алгебраическими операциями умножения, сложения и деления на положительную функцию-константу. Тогда данные общие члены есть функции непрерывные. Отсюда, в силу теоремы 4 [12] (т. II, с. 471) в рядах в (1.10), (1.11) допустим почленный двойной предельный переход при $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ с конечной, в результате, предельной суммой. Получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ y \rightarrow \eta}} \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-\lambda_m b} \operatorname{ch} \lambda_m (y - \eta) - \operatorname{ch} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ y \rightarrow \eta}} [e^{-\lambda_m b} \operatorname{ch} \lambda_m (y - \eta) - \operatorname{ch} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-\lambda_m b} - \operatorname{ch} \lambda_m (b - 2\eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m \xi < \infty \quad (1.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ y \rightarrow \eta}} \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-\lambda_m b} \operatorname{sh} \lambda_m (y - \eta) + \operatorname{sh} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ y \rightarrow \eta}} [e^{-\lambda_m b} \operatorname{sh} \lambda_m (y - \eta) + \operatorname{sh} \lambda_m (b - y - \eta)] / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sh} \lambda_m (b - 2\eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m \xi < \infty \quad (1.17)
\end{aligned}$$

Исследуем далее функции

$$\begin{aligned}
& I_s(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(\xi \pm x)) = e^{-\lambda_1 |y-\eta|} \sin \lambda_1(\xi \pm x) / [(1 - e^{-\lambda_1 |y-\eta|})^2 + 4e^{-\lambda_1 |y-\eta|} \times \\
& \times \sin^2 \lambda_1(\xi \pm x) / 2] \quad (1.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(\xi \pm x)) = \{ (1 - e^{-2\lambda_1 |y-\eta|}) / [(1 - e^{-\lambda_1 |y-\eta|})^2 + 4e^{-\lambda_1 |y-\eta|} \sin^2 \lambda_1(\xi \pm x) / 2] - \\
& - 1 \} / 2 \quad (1.19)
\end{aligned}$$

на непрерывность в точке (ξ, η) .

Рассмотрим прежде случай, когда при x стоит знак плюс. Переходя к двойному пределу в (3.18), (3.19) при $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, находим

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ y \rightarrow \eta}} I_s(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(\xi + x)) = I_s(1, 2\lambda_1 \xi) = \sin 2\lambda_1 \xi / (4 \sin^2 \lambda_1 \xi) = \\
& = \operatorname{ctg} \lambda_1 \xi / 2 < \infty \quad (1.20)
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow \infty \\ \Delta \eta \rightarrow \infty}} I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1(\xi + x)) = I_c(1, 2\lambda_1 \xi) = -1/2 \quad (1.21)$$

Здесь мы учли, что $0 < \xi < a$, откуда $0 < \lambda_1 \xi < \pi$ и двойные пределы существуют и конечны.

Пусть теперь в (1.18), (1.19) при x стоит знак минус. Покажем, что в этом случае двойные пределы не существуют. С этой целью свяжем переменные x и y в окрестности точки (ξ, η) параметрическими зависимостями от θ

$$e^{-\lambda_1 |y-\eta|} = r(\theta) = 1 - \theta^\alpha, \quad \lambda_1(\xi - x) = \theta, \quad (1.22)$$

где $0 < \theta < 1$, $\alpha > 0$, $y > \eta$ или $y < \eta$

Заметим, что когда $\theta \rightarrow 0$, величина $r \rightarrow 1 - 0$, а точка $(x, y) \rightarrow (\xi - 0, \eta)$. Тогда, подставляя (1.22) в (1.18), (1.19) и оставляя лишь члены первого приближения в элементарных функциях, а затем устремляя $\theta \rightarrow 0$ и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} I_s(r(\theta), \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \{r(\theta) \sin \theta / [(1 - r(\theta))^2 + 4r(\theta) \sin^2 \theta / 2]\} =$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \{(1 - \theta^\alpha) \theta / [\theta^{2\alpha} + (1 - \theta^\alpha) \theta^2]\} = \begin{cases} \infty & \text{при } 1/2 < \alpha < \infty \\ 1, & \text{если } \alpha = 1/2 \\ 0, & \text{когда } 0 < \alpha < 1/2 \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} I_c(r(\theta), \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \{(1 - r(\theta)^2) / [(1 - r(\theta))^2 + 4r(\theta) \sin^2 \theta / 2] - 1\} / 2 =$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \{[\theta^\alpha (2 - \theta^\alpha) / [\theta^{2\alpha} + (1 - \theta^\alpha) \theta^2] - 1\} / 2 = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 < \alpha < 2 \\ 1/2, & \text{если } \alpha = 2 \\ -1/2, & \text{когда } 2 < \alpha < \infty \end{cases} \quad (1.24)$$

Рассмотрим далее, когда в (1.18), (1.19) при x по-прежнему стоит знак минус, случай предельного перехода в них по прямой

$$x = \xi \quad (1.25)$$

при стремлении к точке (ξ, η) . Подставляя $x = \xi$ в (1.18), (1.19) и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{y \rightarrow \eta} I_s(e^{-\lambda_1 |y - \eta|}, 0) = 0 \quad (1.26)$$

$$\lim_{y \rightarrow \eta} I_c(e^{-\lambda_1 |y - \eta|}, 0) = \lim_{y \rightarrow \eta} \{(1 - e^{-2\lambda_1 |y - \eta|}) / (1 - e^{-\lambda_1 |y - \eta|})^2 - 1\} / 2 = \lim_{y \rightarrow \eta} \{(1 + e^{-\lambda_1 |y - \eta|}) /$$

$$/ (1 - e^{-\lambda_1 |y - \eta|}) - 1\} / 2 = \infty \quad (1.27)$$

Таким образом, выражение для перерезывающей силы N_x, N_y (1.10) ((1.11)) разлагается на три слагаемых, два из которых: ряд в (1.10) ((1.11)) и слагаемое, содержащее (1.18) ((1.19)) с x со знаком плюс, – непрерывные в точке (ξ, η) функции. Третье же слагаемое, содержащее (1.18) ((1.19)) с x со знаком минус, – теряет непрерывность в точке (ξ, η) следующим образом: найдены кривые (1.22) со значениями α в (1.23), ((1.24)) и прямая (1.25) – предельный переход, по которым приводит к конечным или бесконечным пределам. В частности, в случае прямой (1.25) предел (1.26), ((1.27)), в третьем слагаемом в $N_x(N_y)$ конечен (бесконечен).

Следовательно, перерезывающие силы N_x, N_y в точке приложения сосредоточенной силы (ξ, η) теряют непрерывность следующим образом: найдены различные кривые, приближение по которым к точке (ξ, η) с предельным переходом в N_x, N_y приводит к конечным или бесконечным пределам. В частности, в случае прямой $x = \xi$ предел $N_x(N_y)$ конечен (бесконечен).

Отметим, что полученный нами результат противоречит другому, но физически обоснованному результату об асимптотическом поведении радиальной перерезывающей силы N_r в свободно опертой прямоугольной пластине, который имеет вид

$$N_r \approx -P / (2\pi r) \quad (1.28)$$

Здесь r – радиус круговой окрестности с центром в точке приложения (ξ, η) сосредоточенной силы P . Формула (1.28) получена из уравнения равновесия круговой окрестности в предположении, что N_r – постоянная в первом приближении величина на окружности радиуса r . Действительно, на прямой (1.25)

$$N_x(\xi, y) \approx N_r|_{x=\xi} \approx -P/[2\pi|y - \eta|]$$

отсюда

$$\lim_{y \rightarrow \eta} N_x(\xi, y) = -\infty,$$

что и требовалось доказать.

2. Об удовлетворении перерезывающими силами уравнения равновесия.

Предположим, что ряды для перерезывающих сил N_x, N_y в (1.6) и (1.7) почленно дифференцируются по x и y . Тогда, подставляя данные ряды в уравнение равновесия в [1], получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \frac{2P}{a} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh } \lambda_m \eta \text{ sh } \lambda_m (b-y) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh } \lambda_m \eta \text{ ch } \lambda_m (b-y) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh } \lambda_m \eta \times \\ & \times \text{sh } \lambda_m (b-y) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \frac{\partial \cos \lambda_m x}{\partial x} - \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh } \lambda_m \eta \frac{\partial \text{ch } \lambda_m (b-y)}{\partial y} / \\ & / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \text{sh } \lambda_m \eta \text{ sh } \lambda_m (b-y) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \times \\ & \times \sin \lambda_m x + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \text{sh } \lambda_m \eta \text{ sh } \lambda_m (b-y) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = 0 \end{aligned}$$

при $0 \leq x \leq a, \eta < y \leq b$, (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \frac{2P}{a} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh } \lambda_m y \text{ sh } \lambda_m (b-\eta) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \cos \lambda_m x + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=1}^{\infty} \text{ch } \lambda_m y \text{ sh } \lambda_m (b-\eta) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh } \lambda_m y \times \\ & \times \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \text{sh } \lambda_m y \text{ sh } \lambda_m (b-\eta) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \times \\ & \times \text{sh } \lambda_m (b-\eta) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \frac{\partial \cos \lambda_m x}{\partial x} + \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh } \lambda_m (b-\eta) \frac{\partial \text{ch } \lambda_m y}{\partial y} / \\ & \times \sin \lambda_m x + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \text{sh } \lambda_m y \text{ sh } \lambda_m (b-\eta) / \text{sh } \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = 0 \end{aligned}$$

при $0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \eta$.

Таким образом, уравнение равновесия в G_η обращается в тождество, если названные почленные дифференцирования допустимы. Но в этом легко убедиться при $(x, y) \in G_\eta^{(\delta)} = [0, a] \times [0, \eta - \delta) \cup (\eta + \delta, b]$, где $0 < \delta < \min[\eta, b - \eta]$ – любое, достаточно малое, число, а. Действительно, продифференцированные частно по x (или y) общие члены рядов в (1.6) (или в (1.7)) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} & \left| \pm \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b - y) / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \right| \leq \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b - y) / \\ & / \operatorname{sh} \lambda_m b \leq E_3 \lambda_m e^{\lambda_m (\eta - b)} e^{\lambda_m (b - y)} = E_3 \lambda_m e^{\lambda_m (\eta - y)} \leq E_3 \lambda_m e^{-\lambda_m \delta} \text{ при } (x, y) \in [0, a] \times \\ & \left| \pm \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \right| \leq \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b - \eta) / \\ & / \operatorname{sh} \lambda_m b \leq E_4 \lambda_m e^{\lambda_m (y - b)} e^{\lambda_m (b - \eta)} = E_4 \lambda_m e^{\lambda_m (y - \eta)} \leq E_4 \lambda_m e^{-\lambda_m \delta}, \text{ при } (x, y) \in [0, a] \times \\ & \times [0, \eta - \delta] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь E_3, E_4 – некоторые константы. Тогда, формально почленно продифференцированные сходящиеся ряды в (1.6) и в (1.7) по x и, соответственно, y мажорируются числовыми сходящимися рядами. Поэтому, данные ряды сходятся равномерно в введенных областях в (2.2) их определения [12] (т. II, с. 465). Отсюда, в силу теоремы 7 [12] (т. II, с. 476), данные ряды в (1.6) (или (1.7)) почленно дифференцируются по x (или y) в отмеченных областях. Но $\delta > 0$ – любое, достаточно малое, число. Значит, почленное дифференцирование рядов в (1.6) ((1.7)) по x (y) верно, в чем легко убедиться, и в областях в (1.6) ((1.7)). Что и требовалось доказать.

Таким образом, перерезывающие силы N_x и N_y действительно удовлетворяют уравнению равновесия в G_η .

Замечание. Решение Навье для прогиба данной пластины под сосредоточенной нагрузкой в форме повторного тригонометрического ряда [6] допускает изменение порядка суммирования, которое формально достигается перестановкой в нем x и y , ξ и η , a и b . Поэтому, и в любых преобразованиях данного решения с выводами допустимы названные перестановки.

В силу полученных результатов с учётом вышеприведённого замечания приходим прежде в области $(x, y) \in G_\xi = [0, b] \times ([0, \xi) \cup (\xi, a])$, а затем и при $(x, y) \in G_{\xi\eta} = G_\xi \cup G_\eta = [0, a] \times [0, b] \setminus (\xi, \eta)$, к следующему заключению.

Заключение

1. Рассматриваются решения Навье для прогиба в форме М. Леви прямоугольной свободно опертой пластины, нагруженной поперечной сосредоточенной силой. Получены выражения для перерезывающих сил N_x , N_y в прямоугольнике плана пластины G с исключённой точкой (ξ, η) приложения сосредоточенной силы, доступные для анализа их предельного поведения в окрестности точки (ξ, η) . Доказано, что перерезывающие силы теряют непрерывность как функции двух переменных x и y в точке (ξ, η) следующим образом: найдены различные кривые, приближение по которым к точке (ξ, η) с предельным переходом приводит к различным или конечным, или бесконечным предельным значениям перерезывающих сил. В частности, установлено, что движение по прямой $x = \xi$ ($y = \eta$) к точке (ξ, η) с предельным переходом в N_x (N_y) приводит к их конечному предельному значению. Содержится вывод, что отме-

ченное поведение распределённых физических величин $N_x(N_y)$ в изотропной пластине представляется парадоксом.

2. Решение (обобщённое решение по С.Л. Соболеву) Навье для прогиба удовлетворяет в $G(\xi, \eta)$ уравнению равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций.– М.: Мир, 1971. 192с.
2. Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит.– Ереван: Айастан, 1975. 436с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1965. 433с.
4. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.–Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
5. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках.– Пер. с англ. и польск. М.: МИР, 1982. 542 с.
6. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки.– Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
7. Сейранян С.П. О парадоксе в поведении крутящего момента в окрестности точки приложения сосредоточенной силы // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды III Международной конференции, посвящённой 100-летию академика Н.Х. Арутюняна, г. Цахкадзор, Армения, 8–12 октября, 2012, т.2, с.194 - 198.
8. Сейранян С.П. О предельном переходе от локально распределённой равномерной нагрузки к сосредоточенной в выражениях для компонент градиента прогиба прямоугольной свободно опертой пластины // Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды II международной конференции, г. Дилиджан, Армения, 4 – 8 октября. Т. 2. 2010, с.146 – 150.
9. Сейранян С.П. О предельном переходе от локальной равномерной нагрузки к сосредоточенной во вторых частных производных от прогиба прямоугольной пластины // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VII международной конференции, гг. Горис – Степанакерт, Армения – Карабах, 19–23 сентября, 2011, с. 377 – 385.
10. Сейранян С.П. О предельном переходе в прямоугольной пластине от распределённого по прямоугольнику равномерного внешнего давления к сосредоточенной силе в перерезывающих силах. Еще один парадокс // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред Труды VIII международной конференции, гг. Горис – Степанакерт, Армения – Карабах, 22 – 26 сентября, 2014, с. 398 – 402.
11. Сейранян С.П. О парадоксе в поведении перерезывающих сил в прямоугольной пластине в окрестности точки приложения сосредоточенной силы // Всероссийская конференция по математике и механике. Тезисы докладов, г. Томск, 2 - 4 октября 2013, с.218.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Физматлит, тт. 1- 3, 2008, 1690с.

Сведения об авторе:

Сейранян Сурен Паруйрович –к.ф.м.н., с.н.с. Института механики НАН РА.
Адрес: Республика Армения, г. Ереван, пр. Баграмяна 24/2, Институт механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 55) 542838; **E-mail:** seysuren@mail.ru, seysuren@yandex.ru.

ON JUSTIFICATION OF AMBARTSUMIAN'S PLATE THEORY VIA Γ -CONVERGENCE

Avetisyan A.S., Khurshudyan As.Zh.

Keywords: local minimizers, existence, direct method, calculus of variations, von Kármán plate theory

Ключевые слова: локальный минимум, существование, прямой метод, вариационное исчисление, теория пластин фон Кармана

Abstract. Ambartsumian's plate theory, formulated by S. A. Ambartsumian in 1950s based on improved hypotheses, is justified using the concept of Γ -convergence. Limiting energies of known plane models are summarized. It is shown, that Ambartsumian's theory is of fourth order, equivalent to the linearized von Kármán theory. Moreover, up to a constant multiplier, the limiting energy in Ambartsumian's and linearized von Kármán theories coincide.

Аннотация. Теория пластин Амбарцумяна, построенная Амбарцумяном в 1950-х годах на основе уточнённых гипотез, обосновывается понятием Γ -сходимости. Приводятся предельные энергии известных плоских моделей. Показано, что теория Амбарцумяна, как и линеаризованная теория фон Кармана, имеет четвёртый порядок. Более того, с точностью до постоянного множителя, предельная энергия теории Амбарцумяна и линеаризованной теории фон Кармана совпадают.

1. Introduction

Many applied problems are formulated as variational problems of minimization (maximization) of some specific functional $J : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, where $\mathcal{F}$ is some function space. It is required to find such $f \in \mathcal{F}$, that for all $\varphi \in \mathcal{F}$, $J(f) \leq J(\varphi)$.

In such cases, the Euler-Lagrange equations provide necessary conditions for minimizers of J . However, before solving the Euler-Lagrange equations, the existence of a solution must be established. One of the general methods of the calculus of variations for proving the existence of a minimizer for a given functional is the so-called direct method [1]. One of the advantages of the direct method is that besides proving the existence, it provides a tool for computing the minimizer to desired accuracy.

The algorithm of the direct method goes as follows:

- Choose a minimizing sequence $f_n \in \mathcal{F}$ for J .
- Show, that there is a convergent subsequence $\{f_{n_k}\} \in \{f_n\}$ with $f_{n_k} \rightarrow f_0$ in $\mathcal{F}$.
- Prove, that J is sequentially lower semi-continuous in $\mathcal{F}$.

Recall, that f_n is a minimizing sequence for J , if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = \inf_{f \in \mathcal{F}} J(f).$$

J is called sequentially lower semi-continuous if

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \geq J(f_0)$$

for any convergent sequence $f_n \rightarrow f_0$. The existence follows from the inequality

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(f_{n_k}) \geq J(f_0)$$

and the trivial bound

$$J(f_0) \geq \inf_{f \in \mathcal{F}} J(f).$$

In various applied problems the corresponding functional is not sequentially lower semi-continuous, and thus the existence of a minimizer is impossible to prove using the direct method. See [1] for many such examples. To overcome this difficulty lower semi-continuous envelopes of functionals with lack of that property are considered. Even though there are different approaches on explicit construction of lower semi-continuous envelopes for various types of functionals (see, for instance, [1–4] and references therein), it is actually very complicated to apply in a particular problem.

Another way for derivation a lower semi-continuous functionals in a particular problem is to compute the Γ -limit of the model functional, reducing, for instance, the problem dimension [5–7]. Recently, dimension reduction via Γ -convergence is applied in elasticity theory to derive energy functionals of various theories of beams, plates and shells (see, for instance, [8–18]). A hierarchy of plate models, including membrane, Kirchhoff, von Kármán, Reissner–Mindlin, and of higher order, are justified via Γ -convergence. The aim of the paper is to find out the order of Ambartsumian’s plate theory in the hierarchy of other theories. It is motivated by wide applicability of Ambartsumian’s theory, considering pure bending and transverse shear of thick plates, being a **linear** theory. It could be interesting, for instance, from biomechanics point of view: soft tissues are subjected to in-plane compressive stresses, leading to bending of the tissue in space and compression (in transverse direction) in its plane [19].

The paper is organized as follows. In Section 2 the known Γ -limits of the three-dimensional nonlinear elasticity energy functional are summarized by the order. In Section 3 Ambartsumian’s plate theory is shown to be the Γ -limit of the three-dimensional functional of fourth order, equivalent to the linearized von Kármán theory with linearized isometry constraint.

2. Γ -limits of the three-dimensional nonlinear elasticity theory

Known Γ -limits of the three-dimensional nonlinear elasticity are summarized in this section. For more details and further developments see [14]. Denote the three-dimensional energy of elastic plate of constant thickness h , which occupies the domain

$$\Omega_h = \left\{ (x, y, z), x \in [0, a], y \in [0, b], z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\} \text{ in Cartesian system, by}$$

$$E_h[\mathbf{r}] = \int_{\Omega_h} W(\nabla \mathbf{r}) d\mathbf{x}.$$

Here $\mathbf{r}_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$ is the three-dimensional deformation of the plate, W is the energy density function (for particular energy density functions see, for instance, [21]). Rescaling the energy by h , allows to consider the energy per unit volume

$$I_h[\mathbf{r}] = \frac{1}{h} E_h[\mathbf{r}] = \int_{\Omega} W(\nabla_h \mathbf{r}) d\mathbf{x}, \quad \Omega = \Omega_0 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

where Ω_0 is the middle plane of the plate,

$$\nabla_h \mathbf{r} = \left(\nabla' \mathbf{r}_0, \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial x_3} \right), \quad \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \mathbf{r}_0 = (r_1, r_2) \text{ is the deformation of } \Omega_0. \text{ Then,}$$

a hierarchy of plate models can be justified using the notion of Γ -convergence. Here the known Γ -limits are shortly described, for full derivation see [12–14]. In what follows it is assumed, that

1. $W(\mathbf{QF}) = W(\mathbf{F})$ for all spatial rotations $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$ and deformation gradients $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (rotational invariance),
2. $W = 0$ on $\text{SO}(3)$ (isotropy),
3. $W(\mathbf{F}) \geq c \text{dist}^2(\mathbf{F}, \text{SO}(3))$ for $c > 0$,
4. W is C^2 in the neighborhood of $\text{SO}(3)$.

Here we summarize known Γ -limits of fully two-dimensional models. For one-dimensional models (string, rod, beam) see [8].

2.1. Membrane energy

The simplest two-dimensional model corresponds to the case of stretched/compressed membrane. In the limit when $h \rightarrow 0$, the membrane energy looks like [LDR]

$$E_{mem}[\mathbf{r}_0] = \lim_{h \rightarrow 0} I_h[\mathbf{r}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E_h[\mathbf{r}] = \begin{cases} \int_{\Omega} W_q(\nabla' \mathbf{r}_0) d\mathbf{x}', & \mathbf{r}_0 \in \mathcal{A}_m, \\ \infty, & \text{else.} \end{cases}$$

Here $W_q(\mathbf{F}) = \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} W(\mathbf{F} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{e}_3)$ is the quasiconvex envelope of W ,

$$\mathcal{A}_m = \left\{ \mathbf{r}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3), \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_3} = 0 \right\} \text{ is the set of admissible membrane deformations.}$$

Therefore, the membrane theory is of **first** order in h . This expression is derived using the notion of Γ -convergence in [12] (see also other articles of those authors). Note, that the same expression is obtained earlier by Pipkin in a number of papers (see, for instance, [20]) using simpler considerations of tension field theory. Pipkin's procedure for deriving quasiconvex energy functional is much simpler and in some sense more intuitive, than that from [12].

Actually, W_q depends on the deformation through the first fundamental form of the membrane. Since the principal stretches of the membrane are the square roots of its first fundamental form, W_q is expressed in term of those stretches: $W_q = \tilde{W}_q(\lambda_1, \lambda_2)$.

2.2. Plate energy

Various plate theories for describing as bending regimes, as well as bending and stretching/compression regimes, exist. The simplest theory lies on Kirchhoff's hypotheses and is often referred to as Kirchhoff (Kirchhoff-Love) plate theory. The theory lies on the assumptions, that the in-plane displacements of the plate depend on x_3 linearly, and the normal displacement is independent of x_3 . In other words, it is assumed, that $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_0(\mathbf{x}') + x_3 \mathbf{n}(\mathbf{x}')$.

In [13, 14] it is established, that

$$E_K[\mathbf{r}_0] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} I_h[\mathbf{r}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} E_h[\mathbf{r}] = \begin{cases} \frac{1}{24} \int_{\Omega} Q_2(\mathbf{\Pi}) d\mathbf{x}', & \mathbf{r}_0 \in \mathcal{A}_p, \\ \infty, & \text{else.} \end{cases}$$

Here $Q_2(\mathbf{G}) = \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} Q_3(\mathbf{G} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{a})$, and

$$Q_3(\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}^2} \Big|_{\mathbf{F}=\text{Id}} (\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} \Big|_{\mathbf{F}=\text{Id}} F_{ij} F_{kl} \text{ is twice the linearised energy,}$$

$\mathbf{\Pi} = -\frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \mathbf{n}$ is the second fundamental form, and $\mathbf{n}$ is the unit normal to the mid-

surface of the plate, $\mathcal{A}_p = \left\{ \mathbf{r}_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3), (\nabla' \mathbf{r}_0)^T \nabla' \mathbf{r}_0 = \text{Id} \right\}$ is the set of admissible plate deformations, consisting of isometric immersions, i.e. the mid-surface of the plate is not stretched or compressed. Therefore, Kirchhoff's theory is of **third** order in h .

Since the limiting energy density function depends on the second fundamental form, the eigenvalues of which are the principal curvatures, then it can be represented as a function of those: $Q_2 = \tilde{Q}_2(\kappa_1, \kappa_2)$.

Particularly, for isotropic materials [13, 14]

$$Q_2(\mathbf{G}) = 2\mu \left| \frac{\mathbf{G} + \mathbf{G}^T}{2} \right|^2 + \lambda \text{tr}^2 \mathbf{G},$$

$$Q_3(\mathbf{F}) = 2\mu \left| \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^T}{2} \right|^2 + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \text{tr}^2 \mathbf{F}.$$

The next order plate theory is von Kármán plate theory. The former relies on Kirchhoff's hypotheses, but uses nonlinear strain-displacement relations [22]. It is established in [14], that von Kármán theory is of fifth order in h , moreover, the limiting energy reads as

$$\begin{aligned} E_{vK}[\mathbf{r}_0] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^4} I_h[\mathbf{r}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^5} E_h[\mathbf{r}] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[Q_2 \left(\frac{1}{2} [\nabla' \mathbf{u} + (\nabla' \mathbf{u})^T + \nabla' \mathbf{w} \otimes \nabla' \mathbf{w}] \right) + \frac{1}{24} Q_2 \left((\nabla')^2 \mathbf{w} \right) \right] d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

Here $\mathbf{u}$ and $\mathbf{w}$ are the averaged in-plane and out of plane displacements [14]

$$\mathbf{u} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{x}' \quad x_3) - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] dx_3, \quad \mathbf{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{r}_3 dx_3.$$

On the other hand, linearized von Kármán plate theory is of **fourth** order. The limiting energy is

$$E_{linvK}[\mathbf{r}_0] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} I_h[\mathbf{r}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^4} E_h[\mathbf{r}] = \begin{cases} \frac{1}{24} \int_{\Omega} Q_2 \left((\nabla')^2 \mathbf{w} \right) d\mathbf{x}', & \det(\nabla')^2 \mathbf{w} = 0, \\ \infty, & \text{else.} \end{cases}$$

3. Ambartsumian's theory of plates as Γ -limit of three dimensional nonlinear elasticity theory

Ambartsumian's theory of anisotropic plates was developed in 1950s by prominent scientist Sergey A. Ambartsumian and his colleagues. It is mainly based on the following assumptions [23]:

a) the displacement $\mathbf{w}$ normal to the mid-surface of the plate does not depend on x_3 ,

b) the shear stresses τ_{13} and τ_{23} (or corresponding strains ε_{13} and ε_{23}) have a given distribution over the thickness of the plate:

$$\tau_{13} = \text{l.t.} + f_1(z)\varphi(x, y), \quad \tau_{23} = \text{l.t.} + f_2(z)\psi(x, y),$$

where l.t. denotes the loading terms, f_1, f_2 denote the given distribution, satisfying

$$f_i\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \varphi, \psi \text{ are the behavior of the stresses over the mid-surface of the}$$

plate. The choice of characteristic functions f_1, f_2 defines the order in h of the corresponding theory. In [23] and in what follows it is taken

$$f_1(z) = f_2(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right). \text{ In this case } \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_0(\mathbf{x}') + f(x_3)\mathbf{n}(\mathbf{x}'). \text{ Using}$$

the procedure, applied in [24], it is shown, that Ambartsumian's plate theory is of fourth

order in h . Moreover for $W(\nabla \mathbf{r}) = \frac{1}{2} |(\nabla \mathbf{r})^T \nabla \mathbf{r} - \text{Id}|^2$ the limiting energy is derived

in the form of Wilmore functional (the derivation simply repeats the procedure described in [14, 24], that is why is not brought here)

$$E_{\text{Amb}}[\mathbf{r}_0] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} I_h[\mathbf{r}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^4} E_h[\mathbf{r}] = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{5!} \int_{\Omega} |\mathbf{\Pi}|^2 d\mathbf{x}', & \mathbf{r}_0 \in \mathcal{A}_p, \\ \infty, & \text{else.} \end{cases}$$

Thus, in this case the deformation of the plate mid-surface is isometric as well.

Note, that up to a constant multiplier, Ambartsumian's limiting energy coincides with the Kirchhoff limiting energy for the same energy density, being of higher order.

There exists also the non-zero limit $E_{\text{Amb}}[\mathbf{r}_0] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^5} E_h[\mathbf{r}]$, the physical meaning of

which is under current study and will be reported elsewhere.

4. Conclusion

Ambartsumian's plate theory is of **fourth** order in the thickness of the plate. The limiting energy is the known Wilmore functional, coinciding with the limiting energy within the linearized von Kármán plate theory.

References

- [1] B. Dacorogna, Direct Methods in the Calculus of Variations. Springer, New York, 2008.
- [2] O.A. Hafsa, J.-Ph. Mandallena, Radial representation of lower semicontinuous envelope // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 2014, vol. 7, issue 1, pp. 1–18.

- [3] M. Colombo, A. De Rosa, A. Marchese, S. Stuvard, On the lower semicontinuous envelope of functionals defined on polyhedral chains // arXiv:1703.01938 [math.AP]
- [4] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, Special Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [5] A. Braides, Gamma-Convergence for Beginners. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [6] A. Braides, Local Minimization, Variational Evolution and Γ -convergence. Springer, Basel, 2014.
- [7] G. Dal Maso, An Introduction to Γ -convergence. Birkhäuser, Basel, 2014.
- [8] E. Acerbi, G. Buttazzo, D. Percivale, A variational definition of the strain energy for an elastic string // Journal of Elasticity, 1991, vol. 25, pp. 137–148.
- [9] M.G. Mora, S. Müller Derivation of the nonlinear bending-torsion theory for inextensible rods by Γ -convergence // Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2003, vol. 18, pp. 287–305.
- [10] M.G. Mora, S. Müller, A nonlinear model for inextensible rods as a low energy Γ -limit of three-dimensional nonlinear elasticity // Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire, 2004, vol. 21, pp. 271–293.
- [11] L. Falach, R. Paroni, P. Podio-Guidugli. A justification of the Timoshenko beam model through Γ -convergence // Analysis and Applications, 2017, vol. 15, issue 2, pp. 261–277.
- [12] H. Le Dret, A. Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1995, vol. 74, issue 6, pp. 549–578.
- [13] G. Friesecke, R. D. James, S. Müller, A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three-dimensional elasticity // Communication on Pure and Applied Mathematics, 2002, vol. 55, issue 11, pp. 1461–1506.
- [14] G. Friesecke, R.D. James, S. Müller, A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by Gamma-convergence // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2006, vol. 18, issue 2, pp. 183–236.
- [15] R. Paroni, P. Podio-Guidugli, G. Tomassetti, A justification of the Reissner–Mindlin plate theory through variational convergence // Analysis and Applications, 2007, vol. 5, issue 2, pp. 165–182.
- [16] F. Murat, R. Paroni, Plate theory as the variational limit of the complementary energy functionals of inhomogeneous anisotropic linearly elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Solids, 2017, vol. 18, DOI: 108128651770799
- [17] R. Paroni, P. Podio-Guidugli, On variational dimension reduction in structure mechanics // Journal of Elasticity, 2015, vol. 118, issue 1, pp. 1–13.
- [18] P. Podio-Guidugli, On the validation of theories of thin elastic structures // Mechanica, 2014, vol. 49, issue 6, pp. 1343–1352.
- [19] A. S. Avetisyan, As. Zh. Khurshudyan, S. K. Ohanyan, Improved Mechanical Reduced Order Model and Finite Element Analysis of Three-Dimensional Deformations of

- Epithelial Tissues. In “Perusal of Finite Element Method” ed. by R. Petrova, 2016, pp. 133–159.
- [20] A. C. Pipkin, The relaxed energy density for isotropic elastic membranes // IMA Journal of Applied Mathematics, 1986, vol. 36, pp. 85–99.
- [21] M. H. Sadd Elasticity: Theory, Applications and Numerics. 3rd edition. Elsevier, Boston, 2014.
- [22] Ph. Ciarlet, Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates. Elsevier, 1997.
- [23] S. A. Ambartsumian, Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, & Vibrations. CRC Press, 1991.
- [24] S. Bartels, A. Bonito, R. H. Nochetto, Bilayer plates: Model reduction, Γ -convergent finite element approximation, and discrete gradient flow // Communications on Pure and Applied Mathematics, 2017, vol. 70, issue 3, pp. 547–589.

Information about the authors:

A.S. Avetisyan – Department on Dynamics of Deformable Systems and Connected Fields,
Institute of Mechanics, NAS of Armenia, 0019, Armenia, Yerevan, Baghramyan ave. 24/2,
E-mail: ara_avetisyan@sci.am

As. Zh. Khurshudyan – Department on Dynamics of Deformable Systems and Connected
Fields,
Institute of Mechanics, NAS of Armenia, 0019, Armenia, Yerevan, Baghramyan ave. 24/2,
E-mail: khurshudyan@mechins.sci.am

PARAMETER OPTIMIZATION FOR LAMINATED MULTIFERROIC COMPOSITES

Galichyan T.A., Khurshudyan As.Zh.

Keywords: magnetoelectric effect, magnetostriction, piezoelectricity, thin films, optimization.

Ключевые слова: магнитоэлектрический эффект, магнитострикция, пьезоэлектричество, тонкие слои, оптимизация.

Галичян Т.А., Хуршудян А.Ж.

Оптимизация параметров слоистых композиционных мультиферроиков

Аннотация: Рассматривается максимизация магнитоэлектрического коэффициента по напряжению в слоистом магнитострикционно-пьезоэлектрическом композите путём оптимизации физических параметров магнитострикционного материала. Получено, что в диапазоне параметров используемых магнитострикционных материалов имеется комбинация значений, которая придаёт магнитоэлектрическому коэффициенту более высокое значение, чем отдельные материалы. В расчётах были рассмотрены применяемые на практике известные магнитострикционные материалы.

Abstract: Maximization of voltage coefficient of a multiferroic laminated composite is considered via optimization of physical parameters of magnetostrictive material. It is obtained, that in the range of parameters of magnetostrictive materials in use there is a combination of values, which gives to the voltage coefficient a higher value than separate materials. Practically well-known magnetostrictive materials were considered in the calculations.

Introduction

Multiferroic magnetoelectric (ME) structures, at the same time exhibiting ferromagnetism and ferroelectricity, have recently motivated increasing number of research activities for their scientific interest and drawn significant interests due to their potential applications in many multifunctional devices, such as transducers, passive magnetic field sensors, electric-write magnetic-read memory devices, microwave filters, energy harvest devices, actuators, etc. [1,3]. Natural multiferroic single-phase compounds are rare, and their ME responses are either relatively weak or occurs at temperatures too low for practical applications. In contrast, multiferroic composites, which incorporate both ferroelectric and ferri-ferromagnetic phases, typically yield giant ME coupling response above room temperature, which makes them ready for technical applications.

The historical perspective of the multiferroic ME composite materials appeared in 1972. In such composites the ME effect is generated as a product property of a magnetostrictive and a piezoelectric material. Multiferroic materials [4, 6] with coexistence of at least two ferroic orders (ferroelectric, ferromagnetic, or ferroelastic) have drawn growing interest due to their potential for applications as multifunctional devices. In multiferroic materials, the coupling interaction between the different order parameters could produce new effects, such as ME effect [7,10]. Magnetoelectricity has been observed as an intrinsic effect in some natural material systems at low temperature, which have been under intensive study

recently [11,18], motivated by potential applications in information storage, spintronics, and multiple-state memories. Research progress in single-phase multiferroic ME materials have been summarized and reviewed in a series of conference proceedings on ME interaction phenomena in crystals [7,10] and especially in recent review articles [5,8,17,]. The magnetoelectric response is the appearance of an electric polarization $\mathbf{P}$ upon applying a magnetic field $\mathbf{H}$ (i.e., the direct ME effect, designated as ME_H effect: $\mathbf{P} = (\mathbf{H})$ and/or the appearance of a magnetization $\mathbf{M}$ upon applying an electric field $\mathbf{E}$ (i.e., the converse ME effect, or MEE: $\mathbf{M} = (\mathbf{E})$). An electric polarization is induced by a weak ac magnetic field oscillating in the presence of a dc bias field, and/or a magnetization polarization appears upon applying an electric field.

Of interest, motivated by on-chip integration in microelectronic devices, nanostructured composites of ferroelectric and magnetic oxides have recently been deposited in a film-on-substrate geometry. The coupling interaction between nanosized ferroelectric and magnetic oxides is also responsible for the ME effect in the nanostructures as was the case in those bulk composite materials.

The elastic coupling interaction between the magnetostrictive phase and piezoelectric phase leads to giant ME response of these ME composite materials. For example, a Metglas/lead zirconate titanate fiber laminate has been found to exhibit the highest ME coefficient, and in the vicinity of resonance, its ME voltage coefficient as high as 102 V/cm Oe orders has been achieved, which exceeds the ME response of single-phase compounds by many orders of magnitude. Alternatively and with greater design flexibility, multiferroic ME composites [19] made by combining piezoelectric and magnetic substances together have drawn significant interest in recent years due to their multifunctionality, in which the coupling interaction between piezoelectric and magnetic substances could produce a large ME response [20] (e.g., several orders of magnitude higher than that in those single phase ME materials so far available) at room temperature. The ME effect in composite materials is known as a product tensor property [19,21], which results from the cross interaction between different orderings of the two phases in the composite. Neither the piezoelectric nor magnetic phase has the ME effect, but composites of these two phases have remarkable ME effect. Thus the ME effect is a result of the product of the magnetostrictive effect (magnetic/mechanical effect) in the magnetic phase and the piezoelectric effect (mechanical/electrical effect) in the piezoelectric one.

Magnetostrictive-piezoelectric bilayer structures offer certain advantages over bulk composites [22], because they can be polarized much easier and exhibit practically no leakage currents as the magnetostrictive phase is insulated by the high-resistivity piezoelectric layer. Thereby the value of ME effect in such samples is greater than in bulk composites and they are of great interest in promising novel devices based on ME interaction. The theory of the ME effect in bulk composites based on the effective parameters method at the low frequency region was presented in works [23,27] and in the region of electromechanical resonance first was developed in works [28,31]. But the method of effective parameters can be used when the characteristic size of the structure units of the composite is much smaller than the acoustic wavelength. In this case, the

composite can be regarded as a homogeneous medium. Consideration of the ME effect in layered structures based on the simultaneous solution of the equations of motion and constitutive relations for the magnetostrictive and piezoelectric phases were previously presented in [32,39]. Therein, an expression for the ME voltage coefficient was derived, taking into account the boundary conditions on the interface. Thus, the consideration of the interlayer bonding material was taken into account formally by an interface coupling coefficient [32, 35] or by an assumption of perfect interfacial bonding and equal oscillation amplitude over the thickness of both magnetostrictive and piezoelectric phases [36]. The ME effect in bilayer magnetostrictive-piezoelectric structure taking into account the changes of the amplitude in oscillations over the thickness of the sample was presented in [37,38]. But in these works also the model of the perfect bonding between magnetostrictive and piezoelectric layers was used. Recently, the ME effect was investigated in laminated composite structure coupled by a bonding material and the ME voltage coefficient was derived considering the interlayer bonding material in work [39]. But in this work, the amplitude change of the oscillations over the thickness of the sample (in direction perpendicular to the interface) was not assumed.

Material parameters play a very important role in problems of coupled fields: electro-magneto-elasticity, thermo-elasticity, etc. The independent fields (for instance, electric, magnetic and elastic) are interacting through coupling constants, which characterize the strength of interaction. Higher the coupling coefficient, more significant is the interaction between fields. The coupling coefficient depends only on the material of continuum and differs for different materials. Nevertheless, due to significant progress in material processing, it is possible to create materials with desired (practically arbitrary) coupling coefficient. It is a challenging feature, allowing to process materials according to needs of a particular process, in which they are involved in. For material optimization in thermo-elasticity we refer to [40,41], in magneto-electro-elasticity we refer to [42,43] and references therein. For general and instance considerations see [44,46].

The aim of the paper is twofold: optimize the voltage coefficient over a given set of parameters and by varying the independent material parameters. In the first case, physical parameters of several known materials form the mentioned set, while in the second case, variation is given to independent parameters and parameters for phenomenological materials are derived.

2. Optimization procedure

In the low-frequency region, the magnetoelectric voltage coefficient is nearly independent of frequency. The low-frequency value of the coefficient can be written in the following form [37]:

$$\langle \alpha_E^{low} \rangle = \frac{{}^p Y {}^p d_{xx,z} {}^m q_{xx,z}}{{}^p \varepsilon_{zz} \left(1 - K_p^2 \left(\frac{{}^m Y {}^m t}{{}^m Y {}^m t + {}^p Y {}^p t} \right) \right)} \cdot \frac{{}^m Y {}^m t}{{}^m Y {}^m t + {}^p Y {}^p t} \cdot \frac{{}^p t}{{}^m t + {}^p t} \quad (1)$$

where upper-case index “m” is for magnetostrictive phase and “p” for piezoelectric; mY , pY are the Young’s moduli of the magnetostrictive and piezoelectric phases; mt , pt are the thicknesses of the phases; ${}^pd_{xx,z}$ and ${}^mq_{xx,z}$ are the piezoelectric and piezomagnetic coefficients; ${}^p\varepsilon_{zz}$ is the tensor component of permittivity and $K_p^2 = \frac{{}^pY({}^pd_{xx,z})^2}{{}^p\varepsilon_{zz}}$ the squared coefficient of electromechanical coupling.

The voltage coefficient α_E can be represented in a more convenient form:

$$\alpha_E = {}^{m,p}D \cdot \frac{{}^mq_{xx,z} {}^pY {}^{m,p}A}{1 - K_p^2 (1 - {}^{m,p}A)} \quad (2)$$

where

$${}^{m,p}A = \frac{1}{1 + {}^{m,p}B}, \quad {}^{m,p}B = \frac{\frac{1}{p}v^2 {}^{m,p}C - 1}{1 - \frac{m}{mY} {}^{m,p}C}, \quad {}^{m,p}C = \frac{{}^mY {}^mt + {}^pY {}^pt}{m\rho {}^mt + p\rho {}^pt}, \quad {}^{m,p}D = \frac{{}^pd_{xx,z} {}^mt}{p\varepsilon_{zz} ({}^mt + {}^pt)},$$

v is the longitudinal wave speed,

Since the aim is to optimize α_E with respect to material (physical) parameters of the magnetic, the variation of α_E with respect to material parameters with left superscript m is evaluated:

$$\delta\alpha_E = {}^{m,p}D \cdot \left[\frac{{}^pY {}^{m,p}A \delta({}^mq_{xx,z}) + {}^mq_{xx,z} {}^{m,p}A \delta({}^mY)}{1 - K_p^2 (1 - {}^{m,p}A)} - \frac{1}{{}^{m,p}A^2} \frac{{}^mq_{xx,z} {}^pY (1 - K_p^2)}{1 - K_p^2 (1 - {}^{m,p}A)} \left[{}^{m,p}E_1 \delta({}^mY) + {}^{m,p}E_2 \delta({}^m\rho) \right] \right]. \quad (3)$$

Here

$${}^{m,p}E_1 = \frac{{}^mt}{\left(1 - \frac{1}{m v^2} {}^{m,p}C\right) \left(\frac{1}{p v^2} m\rho {}^mt + {}^pt\right)} - \frac{\frac{1}{p v^2} {}^{m,p}C - 1}{\left(1 - \frac{1}{m v^2} {}^{m,p}C\right)^2} \cdot \frac{m\rho {}^pY {}^pt}{{}^mY^2 (m\rho {}^mt + p\rho {}^pt)},$$

$${}^{m,p}E_2 = -\frac{{}^mt {}^pY {}^{m,p}Y}{p\rho \left(1 - \frac{1}{m v^2} {}^{m,p}C\right) (m\rho {}^mt + p\rho {}^pt)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m v^2} {}^{m,p}C\right)^2} \cdot \frac{{}^mY p\rho {}^pt {}^{m,p}C}{m\rho {}^mt + p\rho {}^pt}.$$

Variation (3) allows to consider partial variations of α_E with respect to parameters ${}^mq_{xx,z}$, mY and ${}^m\rho$.

2.1 Optimization over set of values

In this subsection, the variation (3) is evaluated at certain sets of values of ${}^m q_{xx,z}$, ${}^m Y$ and ${}^m \rho$. The aim is to maximize α_E by choosing ${}^m q_{xx,z}$, ${}^m Y$ and ${}^m \rho$ among materials which are usually used in such structures. Such materials are gathered in Table 1.

Table 1. Parameters of materials used in structures under consideration

Material	${}^m q_{xx,z}$ [m/A]	${}^m Y$ [N/m ²]	${}^m \rho$ [kg/m ³]
Permendur	$1062 \cdot 10^{-12}$	$1.81 \cdot 10^{11}$	8100
Nickel	$1156 \cdot 10^{-12}$	$2.04 \cdot 10^{11}$	8900
NFO	$125 \cdot 10^{-12}$	$1.53 \cdot 10^{11}$	5200
Metglas	$7514 \cdot 10^{-12}$	$1.86 \cdot 10^{11}$	8200
CFO	$556 \cdot 10^{-12}$	$1.54 \cdot 10^{11}$	4600
Manganite	$-120 \cdot 10^{-12}$	$0.6 \cdot 10^{11}$	4400
Terfenol-D	$6108 \cdot 10^{-12}$	$0.55 \cdot 10^{11}$	9300

The absolute values of α_E in the case of chosen materials are presented in Table 2. As piezoelectric material the standard PZT is chosen with ${}^p \varepsilon_{zz} = 1.55 \cdot 10^{-12}$, ${}^p d_{xx,z} = -175 \cdot 10^{-12}$ m/V, ${}^p Y = 0.65 \cdot 10^{11}$ N/m², ${}^p \rho = 7600$ kg/m³. Geometric characteristics are chosen to be ${}^p t = 0.4$ mm, ${}^m t = 0.29$ mm.

2.2 Optimization over interval

A better result can be obtained by maximizing α_E over the interval between the lowest and highest values of ${}^m q_{xx,z}$, ${}^m Y$ and ${}^m \rho$, respectively. Choosing the restrictions $120 \cdot 10^{-12} \leq {}^m q_{xx,z} \leq 7514 \cdot 10^{-12}$, $0.6 \cdot 10^{11} \leq {}^m Y \leq 2.04 \cdot 10^{11}$, $4400 \leq {}^m \rho \leq 8900$, it is derived $|\alpha_E| = 2.44$ for ${}^m q_{xx,z} = 7514 \cdot 10^{-12}$ m/A (Permendur), ${}^m Y = 2.04 \cdot 10^{11}$ N/m² (Nickel), ${}^m \rho = 9208.9$ kg/m³.

Table 2. Magnetolectric voltage coefficients for materials used in structures under consideration

Material	$ \alpha_E $
Permendur	0.331
Nickel	0.375
NFO	0.036
Metglas	2.2
CFO	0.162
Manganite	0.021
Terfenol-D	1

On the other hand, removing the restriction from above on ${}^m Y$ and ${}^m \rho$, a better result is obtained: $|\alpha_E| = 3.67$

for ${}^m q_{xx,z} = 7514 \cdot 10^{-12}$ m/A (Permendur), ${}^m Y = 3.05 \cdot 10^{11}$ N/m², ${}^m \rho = 4403.5$ kg/m³.

References

1. C.-W. Nan, M.I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan, Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions // *J. Appl. Phys.*, 2008, vol. 103, 031101.
2. Y. Wang, D. Gray, D. Berry, J. Gao, M. Li, J. Li, D. Viehland, An extremely low equivalent magnetic noise magnetoelectric sensor // *Adv. Mater.*, 2011, vol. 23, 4111.
3. P. Li, Y. Wen, P. Liu, X. Li, C. Jia, A magnetoelectric energy harvester and management circuit for wireless sensor network // *Sensor. Actuat. A-Phys.*, 2010, vol. 157, 100.
4. H. Schmid, Multi-ferroic magnetoelectrics // *Ferroelectrics*, 1994, vol. 162, 317.
5. M. Fiebig, Revival of the magnetoelectric effect // *J. Phys. D*, 2005, vol. 38, R123.
6. W. Eerenstein, N.D. Mathur, J.F. Scott, Multiferroic and magnetoelectric materials // *Nature (London)*, 2006, vol. 442, 759.
7. Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals, Proceedings of the MEIPIC-2, edited by H. Schmid, Ascona, Switzerland, 13–18 September 1993, [*Ferroelectrics* 161–162 (1994)].
8. Proceedings of the MEIPIC-3, edited by M. Bichurin, Novgorod, Russia, 16–20 September 1996 [*Ferroelectrics* 204 (1997)].
9. Proceedings of the MEIPIC-4, edited by M. Bichurin, Novgorod, Russia, 16–19 October 2001 [*Ferroelectrics* 279–280 (2002)].
10. Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals, edited by M. Fiebig, V.V. Eremenko, and I.E. Chupis (Kluwer, Dordrecht, 2004); Proceedings of the MEIPIC-5, Sudak, Ukraine, 21–24 September (2003).
11. N.A. Hill, Why Are There so Few Magnetic Ferroelectrics? // *J. Phys. Chem. B*, 2000, vol. 104, 6694.
12. T. Kimura, T. Goto, H. Shintani, K. Ishizaka, T. Arima, Y. Tokura, Magnetic control of ferroelectric polarization // *Nature (London)*, 2003, vol. 426, 55.
13. J. Wang, J.B. Neaton, H. Zheng, V. Nagarajan, S.B. Ogale, B. Liu, D. Viehland, V. Vaithyanathan, D.G. Schlom, U.V. Waghmare, N.A. Spaldin, K.M. Rabe, M. Wuttig, R. Ramesh, Epitaxial BiFeO₃ multiferroic thin film heterostructures // *Science*, 2003, vol. 299, 1719.
14. T. Goto, T. Kimura, G. Lawes, A.P. Ramirez, Y. Tokura, Ferroelectricity and giant magnetocapacitance in perovskite rare-earth manganites // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 92, 257201.
15. T. Lottermoser, T. Lonkai, U. Amann, D. Hohlwein, J. Ihringer, M. Fiebig, Magnetic phase control by an electric field // *Nature (London)*, 2004, vol. 430, 541.
16. N. Hur, S. Park, P.A. Sharma, J.S. Ahn, S. Guha, S.W. Cheong, Electric polarization reversal and memory in a multiferroic material induced by magnetic fields // *Nature (London)*, 2004, vol. 429, 392.
17. W. Prellier, M.P. Singh, P. Murugavel, The single-phase multiferroic oxides: from bulk to thin film // *J. Phys.: Condens. Matter*, 2005, vol. 17, R803.
18. S.W. Cheong, M. Mostovoy, Multiferroics: a magnetic twist for ferroelectricity // *Nat. Mater.*, 2007, vol. 6, 13.
19. J. van Suchtelen, Product properties: a new application of composite materials // *Philips Res. Rep.*, 1972, vol. 27, 28.

20. C.W. Nan, Magnetolectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases // *Phys. Rev. B*, 1994, vol. 50, 6082.
21. R.E. Newnham, D.P. Skinner, L.E. Cross, Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites // *Mater. Res. Bull.*, 1978, vol. 13, 525.
22. D.A. Filippov, V.M. Laletin, G. Srinivasan, Low-frequency and resonance magnetolectric effects in nickel ferrite-PZT bulk composites // *Tech. Phys.*, 2012, vol. 57, 44.
23. G. Harshe, J.P. Dougherty, R.E. Newnham, Theoretical modelling of multilayer magnetolectric composites // *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.*, 1993, vol. 4, 145.
24. G. Harshe, J.P. Dougherty, R.E. Newnham, Theoretical modelling of 3-0, 0-3 magnetolectric composites // *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.*, 1993, vol. 4, 161.
25. M.I. Bichurin, V.M. Petrov, G. Srinivasan, Theory of low-frequency magnetolectric effects in ferromagnetic-ferroelectric layered composites // *J. Appl. Phys.*, 2002, vol. 92, 7681.
26. I.A. Osaretin, R.G. Rojas, Theoretical model for the magnetolectric effect in magnetostrictive/piezoelectric composites // *Phys. Rev. B*, 2010, vol. 82, 174415.
27. Y. Wang, D. Hasanyan, M. Li, J. Gao, J. Li, D. Viehland, H. Luo, J., Theoretical model for geometry-dependent magnetolectric effect in magnetostrictive/piezoelectric composites // *Appl. Phys.*, 2012, vol. 111, 124513.
28. M.I. Bichurin, D.A. Filippov, V.M. Petrov, V.M. Laletsin, N.N. Poddubnaya, G. Srinivasan, Resonance magnetolectric effects in layered magnetostrictive-piezoelectric composites // *Phys. Rev. B*, 2003, vol. 68, 132408.
29. D.A. Filippov, M.I. Bichurin, V.M. Petrov, V.M. Laletin, N.N. Poddubnaya, G. Srinivasan, Giant magnetolectric effect in composite materials in the region of electromechanical resonance // *Tech. Phys. Lett.*, 2004, vol. 30, 6.
30. D.A. Filippov, M.I. Bichurin, V.M. Petrov, V.M. Laletin, G. Srinivasan, Resonant amplification of the magnetolectric effect in ferrite-piezoelectric composites // *Phys. Solid State*, 2004, vol. 46, 1674.
31. D.A. Filippov, T.A. Galkina, V.M. Laletin, G. Srinivasan, Inverse magnetolectric effect in disk-shaped samples of ferrite piezoelectric composites // *Phys. Solid State*, 2011, vol. 53, 1832.
32. D.A. Filippov, Theory of magnetolectric effect in ferromagnetic-piezoelectric bilayer structures // *Tech. Phys. Lett.*, 2004, vol. 30, 983.
33. D.A. Filippov, Theory of the magnetolectric effect in ferromagnetic-piezoelectric heterostructures // *Phys. Solid State*, 2005, vol. 47, 1118.
34. D.A. Filippov, U. Laletsin, G. Srinivasan, Resonance magnetolectric effects in magnetostrictive-piezoelectric three-layer structures // *J. Appl. Phys.*, 2007, vol. 102, 093901.
35. D.A. Filippov, G. Srinivasan, A. Gupta, Magnetolectric effects in ferromagnetic films on ferroelectric substrates // *J. Phys. Condens. Matter*, 2008, vol. 20, 425206.
36. M.I. Bichurin, V.M. Petrov, S.V. Averkin, A.V. Filippov, Electromechanical resonance in magnetolectric layered structures // *Phys. Solid State*, 2010, vol. 52, 2116.
37. D.A. Filippov, V.M. Laletin, T.A. Galichyan, Magnetolectric effect in a magnetostrictive-piezoelectric bilayer structure // *Phys. Solid State*, 2013, vol. 55, 1840.

38. D.A. Filippov, T.A. Galichyan, V.M. Laletin, Magnetolectric effect in bilayer magnetostrictive-piezoelectric structure. Theory and experiment. // Appl. Phys. A, 2014, vol. 115, 1087.
39. D. Hasanyan, Y. Wang, J. Gao, M. Li, Y. Shen, J. Li, D. Viehland, Modeling of resonant magneto-electric effect in a magnetostrictive and piezoelectric laminate composite structure coupled by a bonding material // J. Appl. Phys., vol. 112, 064109.
40. O. Sigmund, S. Torquato, Design of materials with extreme elastic or thermoelastic properties using topology optimization. IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials, Volume 60 of the series Solid Mechanics and its Applications. Springer Netherlands, 2002, pp. 233-244.
41. H. Rodrigues, P. Fernandes, A material based model for topology optimization of thermoelastic structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, vol. 38, issue 12, pp. 1951-1965.
42. K.H. Sun, Y.Y. Kim, Layout design optimization for magneto-electro-elastic laminate composites for maximized energy conversion under mechanical loading // Smart Materials and Structures, 2010, vol. 19, issue 5, 055008.
43. M.A.R. Loja, C.M. Mota Soares, J.I. Barbosa, Optimization of magneto-electro-elastic composite structures using differential evolution // Composite Structures, 2014, vol. 107, pp. 276-287.
44. M. Kočvara, J. Zowe, Free Material Optimization: An Overview. In "Trends in Industrial and Applied Mathematics" edited by A. H. Siddiqi, M. Kočvara, Springer, 2002, pp. 181-215.
45. J. Haslinger, M. Kočvara, G. Leugering, M. Stingl, Multidisciplinary free material optimization // SIAM Journal of Applied Mathematics, 2010, vol. 70, issue 7, pp. 2709-2728.
46. S. Czarnecki, T. Lewinski, On material design by the optimal choice of Young's modulus distribution // International Journal of Solids and Structures, 2017, vols. 110-111, pp. 315-331.

Information about the authors:

Galichyan T.A., PhD, Researcher in Institute of Mechanics NAS of Armenia,
 Affiliation: Institute of Mechanics, Armenian NAS
 Address: 24B Baghramyan Avenue, 0019 Yerevan, Armenia
 Tell: +374 77 77 62 91
 E-mail: TigranGalichyan@yahoo.com

Khurshudyan As.Zh, PhD, Researcher in Institute of Mechanics NAS of Armenia,
 Affiliation: Institute of Mechanics, Armenian NAS
 Address: 24B Baghramyan Avenue, 0019 Yerevan, Armenia
 Tell: +374 43 70 14 01
 E-mail: khurshudyan@mechins.sci.am

**THE PROPAGATION OF HIGH-FREQUENCY ELECTROELASTIC (SH)
WAVE SIGNAL IN HOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC LAYER
WAVEGUIDE WITH MECHANICALLY RIGIDLY CLAMPED AND
ELECTRICALLY OPEN (OR ELECTRICALLY CLOSED) WEAKLY
INHOMOGENEOUS SURFACES**

Kamalyan A.A., Hunanyan A.A.

Keywords: composite waveguide; rough surfaces; normal wave signal; MELS hypotheses; wave modes; frequency zone; dispersion dependencies; shear electro-elastic waves.

Ключевые слова: композитный волновод; не гладкая поверхность; нормальный волновой сигнал; гипотезы MELS; волновые моды; частотная зона; дисперсионная зависимость; электроупругие сдвиговые волны.

Камалян А.А., Унанян А.А.

Распространение высокочастотного электроупругого (SH) волнового сигнала в однородном пьезоэлектрическом слое-волноводе с механически жёстко закреплёнными и электрически открытыми (или электрически закрытыми) слабо неоднородными поверхностями

Аннотация: Исследуется распространение высокочастотного электроупругого волнового сигнала в композитном волноводе. Волновод состоит из базового пьезоэлектрического слоя с шероховатыми поверхностями, которые залиты соответственно идеальным проводником и идеальным диэлектриком. Решение проводится использованием виртуальных срезов и вводом гипотез MELS (hypothesis of Magneto Elastic Layered Systems). Обсуждаются как воздействие шероховатости поверхностей, так и эффект поверхностного сглаживания разными материалами (эффект разных физико-механических граничных условий) на процесс распространения высокочастотного электроупругого нормального сигнала. Численно исследованы амплитудное распределение и частотная характеристика волнового поля в композитном волноводе при распространении нормального волнового сигнала. Оказывается, что в случае распространения медленных волн возникает зона частотного умолчания для волн определённых длин.

Abstract. Propagation of high-frequency electro-elastic normal wave signal in a composite waveguide is investigated. The composite waveguide consists of a base piezoelectric layer with rough surfaces, which respectively are filled with an ideal conductor and ideal dielectric. The problem is solved by the method of virtual cross sections and input of Magneto Elastic Layered Systems (MELS) hypotheses. The influence of surfaces roughness, as well as and the influence of surface smoothness (the effects of different physical and mechanical boundary conditions) on the process of propagation of high frequency electro-elastic normal wave signal is discussed. The behaviors of wave amplitude and frequency characteristics in the composite waveguide are numerically investigated at the propagation of normal wave signal. It is shown that on the propagation of slow waves, occurs frequency zone of silence at certain wave lengths.

Introduction. The localization of wave energy near body surfaces is ordinary at the propagation of wave signals in mediums with geometric constraints. It is known that the reason of localization near boundary sections of medium is the interruption of homogeneity of physico-mechanical characteristics of fields, which leads to loads on surface sections of medium. Often, based on the technical requirements, this phenomenon, as unnecessary, may be eliminated by proper selection of geometry of structural elements or by material characteristics of medium. But, often it is possible to take the advantage of the presence of such phenomenon and select the structural elements in different devices with appropriate geometrical and physical characteristics.

Different types of localization of the wave energy are found in the sources about elastic surface waves [1-4]. More details about the conditions of wave energy localization near the boundary sections of medium, their varieties depending on the nature of the surface compounds and their applications in various devices can be found in [5-9], etc.

The reason of distortion of the propagating normal wave signal or localization of wave energy, together with the effective physico-mechanical characteristics of the material can also be geometric surface heterogeneities, such as roughness and waviness of the surfaces of the waveguide [10-15].

Surface roughness and waviness of the waveguide formally form peculiarly efficient, geometrically thin heterogeneous layers in the near-border areas of the waveguide [16-21].

In the proposed work we consider the problem of possible localization of wave energy near to rough surfaces of homogeneous piezoelectric waveguide at different electro-mechanical boundary conditions. The electro-mechanical boundary conditions, different by nature, are obtained due to filling of surface heterogeneities with dielectric or conductive materials.

Problem Statement. Let us assume, that in Cartesian coordinate system $\{x; y; z\}$ we have a piezoelectric layer $\Omega \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty\}$ with non-smooth surfaces $y = h_{\pm}(x) \in \mathbb{L}_2$.

Suppose, that the smooth surfaces $y = h_{\pm}(x)$ of the waveguide are mechanically rigidly clamped, forming mechanically closed borders. The non-smooth surface $y = h_-(x)$ is clamped with a rigid dielectric layer forming electrically closed surface, and the other non-smooth surface $y = h_+(x)$ is clamped with a soft dielectric layer ($\epsilon_e \ll \epsilon_{11}$) forming an electrically open surface.

During technological processing of the basic piezoelectric layer, in addition to the surface roughness, inhomogeneity of the material appears in the near-surface zones. These near-surface zones are especially important in studies of shortwave signal propagation in composite waveguides. To account for these inhomogeneities in the near-surface zones, we first introduce virtual slices $y = h_0(1 - \gamma_+)$ and $y = -h_0(1 - \gamma_-)$. Then, with the basic waveguide, we will already consider three-layer piezoelectric waveguide, consisting of basic homogeneous layer of constant thickness $2H_0 = 2h_0(1 - \gamma_+ - \gamma_-)$:

$$\Omega_0 \triangleq \{|x| < \infty; -h_0(1 - \gamma_-) \leq y \leq h_0(1 - \gamma_+); |z| < \infty\}, \quad (1)$$

and two inhomogeneous over the thickness near-surface thin layers of variable thicknesses

$$\xi_+(x) \triangleq h_0(1 + \gamma_+) - h_+(x) \text{ and } \xi_-(x) \triangleq |h_0(1 + \gamma_-) + h_-(x)|, \text{ respectively}$$

(see Fig. 1)

$$\Omega_- \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq -h_0(1 - \gamma_-); |z| < \infty\}, \quad (2)$$

$$\Omega_{\pm} \triangleq \{ |x| < \infty; h_0(1-\gamma_{\pm}) \leq y \leq h_{\pm}(x); |z| < \infty \}. \quad (3)$$

Let us assume, that high-frequency (short-wave) elastic shear (SH) wave signal propagates in the composite waveguide, the length of which is much smaller than the base layer thickness $\lambda_0 \ll 2H_0 - 2h_0$. Additionally assume, that the material of the basic piezoelectric layer Ω_0 belongs to the tetragonal class $4mm$ symmetry or hexagonal class $6mm$ symmetry, for which, when the axis Ox_3 is parallel to the axis of piezo-crystal symmetry $\bar{p}$, of fourth (or sixth) order, the electro-active shear deformations $\{0; 0; w(x, y, t); \varphi(x, y, t)\}$ are separated from non-electro-active plane deformations $\{u(x, y, t); v(x, y, t); 0; 0\}$.

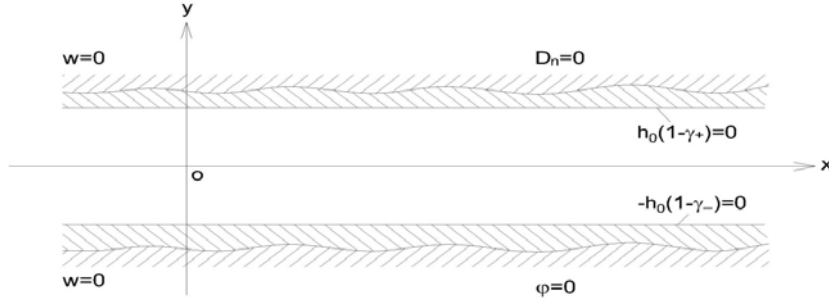


Fig. 1. Homogeneous piezoelectric waveguide with weakly inhomogeneous, mechanically rigidly clamped and electrically open (closed) surfaces

As in the previous paragraph, the quasi-static equations of electroelasticity for these crystals in the basic layer of composite waveguide will have the following form:

$$\nabla^2 w_0(x, y, t) = c_{0t}^{-2} \cdot \ddot{w}_0(x, y, t), \quad (4)$$

$$\nabla^2 \varphi_0(x, y, t) = (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot \nabla^2 w_0(x, y, t). \quad (5)$$

Here $c_{0t}^2 \triangleq G/\rho$ is the speed of the shear body electroelastic wave in the homogeneous piezoelectric, G is the shear modulus, ρ is the density, e_{15} is the piezoelectric modulus and ε_{11} is the dielectric coefficient of the medium.

The equations of electroelasticity of laterally inhomogeneous piezoelectric layer will be solved in virtually selected layers $\Omega_{\pm}^p$ as well, (3.1.7) and (3.1.8) of previous paragraph. These equations will be solved taking into account the material relations for the component of mechanical strain and induction of electric field of homogeneous material (3.1.9) or laterally inhomogeneous material (3.1.10).

Electromechanical boundary conditions are satisfied on the outer, mechanically rigidly clamped, electrically closed surface $y = h_-(x)$ of inhomogeneous, over the thickness near-surface thin layer with variable thickness $\xi_-(x) \triangleq |-h_0(1-\gamma_-) - h_-(x)|$

$$w_-(x, h_-(x), t) = 0; \quad (6)$$

$$\varphi_-(x, h_-(x), t) = 0. \quad (7)$$

Electromechanical boundary conditions are satisfied on outer, mechanically rigidly clamped, electrically open surface $y = h_+(x)$ of inhomogeneous over the thickness near-surface thin layer with variable thickness $\xi_+(x) \triangleq |h_+(x) - h_0(1-\gamma_+)|$:

$$w_+(x, h_+(x), t) = 0; \quad (8)$$

$$h'_+(x)D_x^+(x, h_+(x), t) + D_y^+(x, h_+(x), t) = 0. \quad (9)$$

As in the previous problem, full continuity conditions of electromechanical fields for homogeneous and inhomogeneous piezoelectric layers are satisfied on virtually selected slices $y = -h_0(1-\gamma_-)$ and $y = h_0(1-\gamma_+)$:

$$w_0(x, -h_0(1-\gamma_-), t) = w_-(x, -h_0(1-\gamma_-), t), \quad (10)$$

$$\varphi_0(x, -h_0(1-\gamma_-), t) = \varphi_-(x, -h_0(1-\gamma_-), t), \quad (11)$$

$$\sigma_{yz}^0(x, -h_0(1-\gamma_-), t) = \sigma_{yz}^-(x, -h_0(1-\gamma_-), t), \quad (12)$$

$$D_y^0(x, -h_0(1-\gamma_-), t) = D_y^-(x, -h_0(1-\gamma_-), t), \quad (13)$$

$$w_0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = w_+(x, h_0(1-\gamma_+), t), \quad (14)$$

$$\varphi_0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = \varphi_+(x, h_0(1-\gamma_+), t), \quad (15)$$

$$\sigma_{yz}^0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = \sigma_{yz}^+(x, h_0(1-\gamma_+), t), \quad (16)$$

$$D_y^0(x, h_0(1-\gamma_+), t) = D_y^+(x, h_0(1-\gamma_+), t). \quad (17)$$

It is seen from the given boundary conditions, that in addition to the commonly used material relations, due to the presence of non-smooth surfaces in the multilayer waveguide, the tangential component of the induction of the electric field of Ω_+ is involved in the boundary condition (9):

$$D_x^\pm(x, y, t) = e_\pm(y) \frac{\partial w_\pm(x, y, t)}{\partial x} - \varepsilon_\pm(y) \frac{\partial \varphi_\pm(x, y, t)}{\partial x}. \quad (18)$$

The boundary conditions (6)-(9) do not include the values of potential and normal component of the electric field induction of the vacuum half-spaces, because the surface

$y = h_-(x)$ is isolated by perfect conductor (c.f. (7)), and the surface $y = h_+(x)$ is isolated by soft dielectric (c.f. (9)).

Thus, the homogeneous piezoelectric layer-waveguide with surface inhomogeneities is modelled as a three-layer waveguide of different materials. The problem of wave process investigation (localization of shear elastic wave in forming near-surface inhomogeneous thin layers Ω_- and Ω_+ , delay of normal waves of certain frequencies, occurrence of dynamic surface loads, etc.) during the propagation of electroelastic normal shear wave signal, mathematically is formulated as a boundary value problem with quasi-static equations of electroelasticity in the respective layers, with coupled electromechanical boundary conditions on the slices of materials separation (6)-(17).

From mathematical point of view the obtained boundary-value problem is complicated by the fact that in both virtually selected layers Ω_- and Ω_+ , the equations of electroelasticity of the laterally inhomogeneous piezoelectric with variable coefficients should be solved. Due to non-smoothness of the surface $y = h_+(x)$, variable coefficients will also be available in the boundary condition (12).

Problem Solution. To avoid mathematical difficulties, for solving the wave propagation problem, taking into account the material weak inhomogeneity and surface geometry in near-surface zones, a hypothetical approach is applied. For propagation of normal wave signal in the composite waveguide, the wave solution of the system of equations (4) and (5) in the basic homogeneous piezoelectric layer Ω_0 will be written in the form of normal wave:

$$w_0(x, y, t) = [A_0 e^{\alpha_0 ky} + B_0 e^{-\alpha_0 ky}] e^{i(kx - \omega_0 t)}, \quad (19)$$

$$\varphi_0(x, y, t) = \left\{ C_0 e^{ky} + D_0 e^{-ky} + (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot [A_0 e^{\alpha_0 ky} + B_0 e^{-\alpha_0 ky}] \right\} e^{i(kx - \omega_0 t)}. \quad (20)$$

Here $\alpha_0 = \sqrt{1 - \eta_0^2}$ is the formation coefficient of elastic waves through the thickness of the base layer, and $\eta_0 \triangleq (\omega_0/k) \cdot (\rho_0/\tilde{G}_0)^{1/2}$ is the pha velocity of the normal wave in the base layer Ω_0 , which in general are functions of variable wave number $k(x)$.

Considering the thinness of the other two boundary layers and the complexity of the analytical solution of the electroelasticity equations in virtually selected heterogeneous layers Ω_- and Ω_+ , over the thickness of each layer we introduce hypotheses **MELS** for distributions of elastic shear and potential of electric field. The elastic shear and potential of the electric field in the virtually selected heterogeneous piezoelectric layer Ω_+ are introduced as follows:

$$w_+(x, y, t) = [1 - f_+(y; kh_0; h_+(x)/h_0)] \cdot w_0(x, h_0(1 - \gamma_+), t), \quad (21)$$

$$\begin{aligned}\varphi_+(x, y, t) = & \varphi_0(x, h_0(1 - \gamma_+), t) + \\ & + f(y; kh_0; h_+(x)/h_0) \cdot [\varphi_+(x, h_+(x), t) - \varphi_0(x, h_0(1 - \gamma_+), t)].\end{aligned}\quad (22)$$

Here

$f_+(y; kh_0; h_+(x)/h_0) \triangleq \text{sh}[\alpha_+ k(y - h_0(1 - \gamma_+))]/\text{sh}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))]$ is the distribution function (or formation) of electromechanical field in the inhomogeneous piezoelectric layer. Moreover, the condition (8), (14) and (15) are satisfied automatically with the choice of distribution function in (21) and (22). The surface value $\varphi_+(x, h_+(x), t)$ is obtained from the condition (9), and therefore the expressions (21) and (22) are represented by arbitrary constant amplitudes $\{A_0; B_0; C_0; D_0\}$ of electroelastic wave signal:

$$w_+(x, y, t) = \left[1 - \frac{\text{sh}[\alpha_+ k(y - h_0(1 - \gamma_+))]}{\text{sh}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))]} \right] \cdot w_0(x, h_0(1 - \gamma_+), t), \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\varphi_+(x, y) = & \frac{\text{sh}[\alpha_+ k(y - h_0(1 - \gamma_+))]}{\alpha_+} \cdot \{C_0 e^{kh_0(1 - \gamma_+)} - D_0 e^{-kh_0(1 - \gamma_+)}\} + \\ & + \left[1 + \frac{\text{sh}[\alpha_+ k(y - h_0(1 - \gamma_+))]}{\text{sh}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))]} \right] \cdot \left\{ \begin{aligned} & C_0 e^{kh_0(1 - \gamma_+)} + D_0 e^{-kh_0(1 - \gamma_+)} + \\ & + \frac{e_0}{\varepsilon_0} \cdot \left[\begin{aligned} & A_0 e^{\alpha_0 kh_0(1 - \gamma_+)} + \\ & + B_0 e^{-\alpha_0 kh_0(1 - \gamma_+)} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}.\end{aligned}\quad (24)$$

Note, that the formation function $f_+(y; kh_0; h_+(x)/h_0)$ of unknown characteristics of the wave field is represented by the formation coefficient $\alpha_+(k) \triangleq \left[(\rho_+ \omega_0^2 / k^2 G_+) - 1 \right]^{1/2}$ and by the variable thickness $\xi_+(x) \triangleq h_0(1 + \gamma_+) - h_+(x)$ of the layer.

Similarly, the elastic shear and the potential of the electric field in virtually selected inhomogeneous piezoelectric layer Ω_- are represented in the following forms using the relations (21) and (22)

$$w_-(x, y, t) = \{1 - f_-(y; kh_0; h_-(x)/h_0)\} w_0(x, -h_0(1 - \gamma_-), t), \quad (25)$$

$$\varphi_-(x, y, t) = \{1 - f_-(y; kh_0; h_-(x)/h_0)\} \varphi_0(x, -h_0(1 - \gamma_-), t), \quad (26)$$

where the formation function $f_-(y; kh_0; h_-(x)/h_0) \triangleq \text{sh}[\alpha_- k(y + h_0(1 - \gamma_-))]/\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]$ in the inhomogeneous piezoelectric layer is represented by the new formation coefficient

$$\alpha_-(k) \triangleq \left[(\rho_- \omega_0^2 / k^2 G_-) - 1 \right]^{1/2} \quad \text{and} \quad \text{variable} \quad \text{thickness}$$

$$\xi_-(x) \triangleq |h_0(1 + \gamma_-) + h_-(x)|, \text{ characterizing the layer.}$$

The conditions (6), (7), (10) and (11) are satisfied automatically with the choice of distribution function in (25) and (26). Therefore, the expressions of the distributions (25) and (26) are expressed by arbitrary constant amplitudes $\{A_0; B_0; C_0; D_0\}$ of electroelastic wave signal:

$$w_-(x, y) = \left\{ 1 - \frac{\text{sh}[\alpha_- k(y + h_0(1 - \gamma_-))]}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right\} \cdot \{A_0 e^{-\alpha_0 k h_0(1 - \gamma_-)} + B_0 e^{\alpha_0 k h_0(1 - \gamma_-)}\}, \quad (27)$$

$$\varphi_-(x, y) = \left\{ 1 - \frac{\text{sh}[\alpha_- k(y + h_0(1 - \gamma_-))]}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right\} \cdot \left\{ \begin{aligned} &C_0 e^{-k h_0(1 - \gamma_-)} + D_0 e^{k h_0(1 - \gamma_-)} + \\ &+ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \cdot \left[A_0 e^{-\alpha_0 k h_0(1 - \gamma_-)} + B_0 e^{\alpha_0 k h_0(1 - \gamma_-)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

Here $\xi_-(x, k) = \text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]$ characterizes the function of near-surface distributions in the formed heterogeneous layer Ω_- .

The introduced distributions of characteristics of the wave field (19), (20), as well as (25)-(28) describe the picture of distribution over the thickness of the composite waveguide. In order to evaluate the wave number $k(h_\pm(x)/h_0; \gamma_\pm; \omega_0)$, which is determined from dispersion equation, we obtain a system of four homogeneous algebraic equations with respect to the amplitude constant $\{A_0; B_0; C_0; D_0\}$, satisfying the boundary conditions (12), (13), (16) and (17).

The dispersion equation of the formed wave field is obtained from the condition of existence of nontrivial solutions in the following form:

$$\det \| g_{ij} (G_k; \rho_k; e_k; \varepsilon_k; h_\pm(x); \omega_0; k(x, \omega_0)) \|_{4 \times 4} = 0, \quad (29)$$

where

$$g_{11} = G_0 k \alpha_0 \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{\alpha_- / \alpha_0}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right) + \\ &+ \chi_0^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_- / \alpha_0}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right) \end{aligned} \right\} \cdot \exp[-\alpha_0 k h_0(2 - \gamma_- - \gamma_+)],$$

$$g_{12} = G_0 k \alpha_0 \left\{ \chi_0^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_- / \alpha_0}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right) - \left(1 + \frac{\alpha_- / \alpha_0}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right) \right\} \cdot \exp[\alpha_0 k h_0(2 - \gamma_- - \gamma_+)],$$

$$g_{13} = e_0 k \left(1 - \frac{\alpha_-}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right),$$

$$g_{14} = -e_0 k \left(1 + \frac{\alpha_-}{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]} \right),$$

$$g_{21} = 2e_0 \cdot \exp[-\alpha_0 k h_0(2 - \gamma_- - \gamma_+)],$$

$$g_{22} = 2e_0 \cdot \exp[\alpha_0 k h_0(2 - \gamma_- - \gamma_+)],$$

$$g_{23} = g_{24} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]}{\alpha_-} \right),$$

$$g_{24} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\text{sh}[\alpha_- k(h_-(x) + h_0(1 - \gamma_-))]}{\alpha_-} \right),$$

$$g_{31} = \left\{ \left(h'_+(x) \right)^2 - \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e_0}{e_+} h'_+(x) + 1 \right\} e_+ \alpha_+ k \cdot \text{cth}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))] - \frac{e_0}{\varepsilon_0},$$

$$g_{32} = \left\{ \left(h'_+(x) \right)^2 - \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e_0}{e_+} h'_+(x) + 1 \right\} e_+ \alpha_+ k \cdot \text{cth}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))] - \frac{e_0}{\varepsilon_0},$$

$$g_{33} = \left\{ \frac{-\varepsilon_+ k h'_+(x) \cdot [1 + h'_+(x)] \cdot \text{ch}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))] - \text{sh}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))]}{\alpha_+} \right\} \cdot \exp[k h_0(2 - \gamma_- - \gamma_+)],$$

$$g_{34} = \left\{ \frac{\varepsilon_+ k h'_+(x) \cdot [1 + h'_+(x)] \cdot \text{ch}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))] + \text{sh}[\alpha_+ k(h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+))]}{\alpha_+} \right\} \cdot \exp[-k h_0(2 - \gamma_- - \gamma_+)],$$

$$g_{41} = g_{42} = (G_0 / e_0) \cdot (1 + \chi_0^2), \quad g_{42} = (G_0 / e_0) \cdot (1 + \chi_0^2), \quad g_{44} = 0, \quad g_{43} = 0.$$

Formally, the dispersion equation is obtained in complex form. Obviously this is due to the presence of expression $h'_\pm(x) \cdot D_x^+(x, h_\pm(x), t)$ in the boundary condition (9).

However, for $f_{\pm}(y; kh_0; h_{\pm}(x)/h_0)$, the imaginary part of the dispersion equation is satisfied automatically.

It is easy to see from the coefficient relations of distributions of physic-mechanical fields (19), (20), (23), (24), (25) and (26), that amplitude distribution and frequency of the wave field through the waveguide depend on the physico-mechanical constants of boundary materials, as well as characteristic linear dimensions of the surface non-smoothness of composite waveguide.

Numerical Analysis. It is shown in [12], that during propagation of long-wave signals, the interaction of propagating normal wave and weak surface non-smoothness practically does not occur. Although in this case wave forms, damped over the depth of the base layer, i.e. $\exp[-\alpha_i(\omega_0; k(x)) \cdot y]$, can be neglected, reducing to two uncoupled problems of piezoelectric half-spaces with different electromechanical surface conditions, but in this case we generally lose the ability to accurately calculate the influence of the surface non-smoothness for forming waves in the base layer of the waveguide. Therefore, in the calculations remain quantitatively small, but qualitatively important components.

First, present the characteristic frequency description of the problem of plane electroelastic shear wave signal propagation in piezoelectric homogeneous waveguide with mechanically rigidly clamped, weakly inhomogeneous surfaces, when one surface of the waveguide-layer is electrically open and the other is electrically closed.

Fig.2 shows the dependence of the wave number for fast normal waves for harmonic mode of oscillations $\text{sh}[\alpha_0 k(y - h_{\pm}(x))]$.

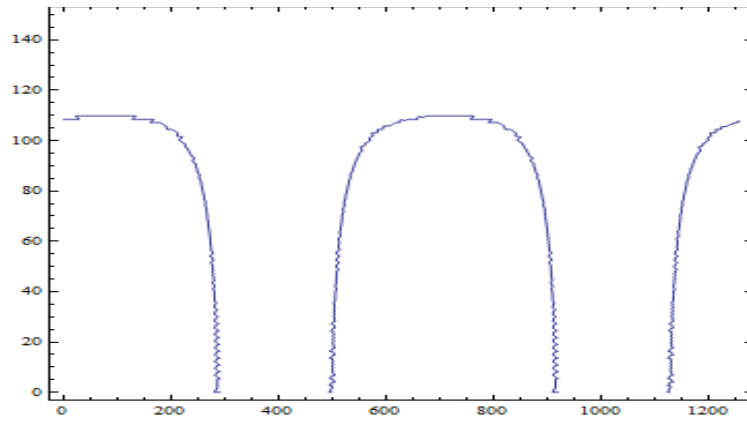


Fig. 2. Dependence of the wave number $k(x)$ on x coordinate at fixed source frequency $\omega_0 = 200000 \text{ Hz}$

It follows from Fig. 2, that for each source frequency $\omega_0 = \text{const}$, fast wave signals are converted into a wave process with a given wave number $k_0(x)$, with corresponding period cycle of the wave formation.

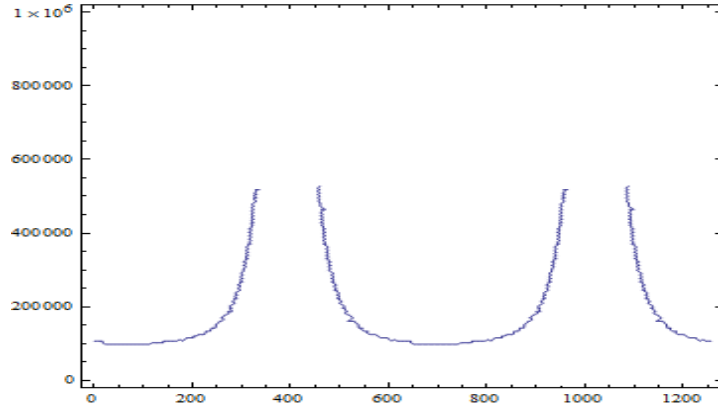


Fig. 3. Frequency dependence $\omega(x)$ of fast wave signals on x coordinate for fixed wave length $k_0 = 50 \text{ m}^{-1}$

The period (in the calculations it is $T = 200\pi$) is formed by the relationship of linear dimensions of the base layer and surface roughness. Fig. 2 and Fig. 3 show that there are certain periodic zones $\{[x_0; x_1] + 200\pi\}$, where the wave number $k(x)$ and frequency $\omega(x)$ are not defined. It is also seen from the figures that at high frequency (shortwave) signal of order $\lambda \sim \pi/25 \text{ m}$, the frequency can raise from $\omega \approx 85 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ to $\omega \approx 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$. Note, that the wave number decreases in the areas of definition and the frequency increases synchronously and their ratio remains constant, moreover ultrashort wave solutions do not exist, for example, when $k_n \geq 250 \text{ m}^{-1}$.

For slow waves when the phase speed is less than the values of shear body waves in the piezoelectric, the distortion of wave functions and frequencies occur similarly, but in different directions. In contrast to the case of fast waves, in this case, the wave number and the frequency are changing in other intervals and by opposite signs of monotony (see Figs. 4 and 5).

It is necessary to pay attention to the fact, that in this case the same periodic zones $\{[x_0; x_1] + 200\pi\}$ appear, where the given wave number $k(x)$ and frequency $\omega(x)$ are not defined. It is also seen from Fig. 4 and 5, that for high-frequency (short-wave) signal of order $\lambda \sim \pi/80 \text{ m}$, the frequency can decrease from $\omega \approx 285 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ to $\omega \approx 0 \text{ Hz}$.

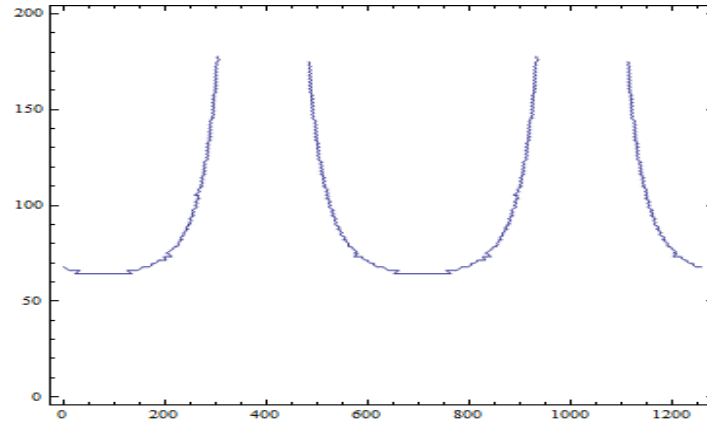


Fig. 4 Dependence of the wave number $k(x)$ on x coordinate at fixed source frequency $\omega_0 = 100000$ Hz

Note that the wave number increase in the areas of definition and the frequency decreases synchronously and their ratio remains constant, moreover, ultrashort wave solutions do not exist, for example, when $k_n \geq 165 \text{ m}^{-1}$.

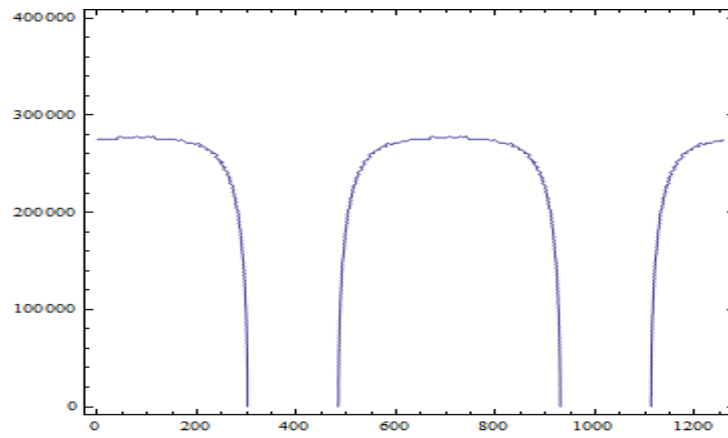


Fig. 5 Frequency dependence $\omega(x)$ of fast wave signals on x coordinate for fixed wave length $k_0 = 160 \text{ m}^{-1}$

Figs. 6 and 7 show the dispersion dependence of fast and slow waves, respectively.

Obviously with the help of obtained relations, the distribution of electroelastic wave through all thickness of piezoelectric waveguide is built taking into account the virtually selected geometrically and physically inhomogeneous near-surface layers, respectively (Fig. 8 and Fig. 9):

$$w(x, y) = \begin{cases} w_+(x, y, h_+(x)); & \text{in } y \in [h_0(1-\gamma_+); h_+(x)] \\ w_0(x, y); & \text{in } y \in [-h_0(1-\gamma_-); h_0(1-\gamma_+)] \\ w_-(x, y, h_-(x)); & \text{in } y \in [h_-(x); -h_0(1-\gamma_-)] \end{cases} \quad (30)$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_+(x, y, h_+(x)); & \text{in } y \in [h_0(1-\gamma_+); h_+(x)] \\ \varphi_0(x, y); & \text{in } y \in [-h_0(1-\gamma_-); h_0(1-\gamma_+)] \\ \varphi_-(x, y, h_-(x)). & \text{in } y \in [h_-(x); -h_0(1-\gamma_-)] \end{cases} \quad (31)$$

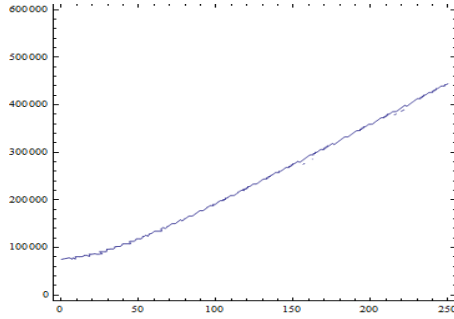


Fig. 6 Frequency dependence $\omega(k)$ of fast wave signals on the wave number k for fixed x coordinate $x = 200$

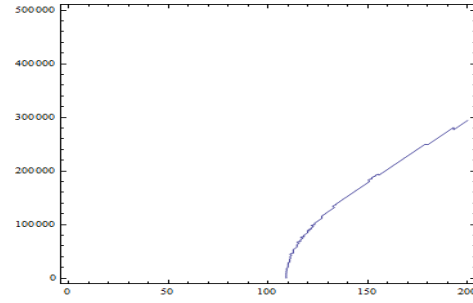


Fig. 7 Frequency dependence $\omega(k)$ of fast wave signals on the wave number k for fixed x coordinate $x = 200$

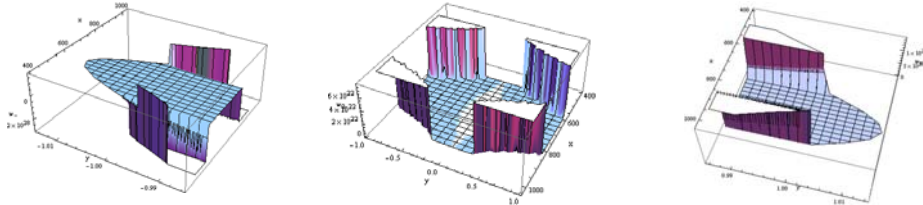


Fig. 8 Distribution of the elastic shear over the thickness of the waveguide $h_-(x) \leq y \leq h_+(x)$

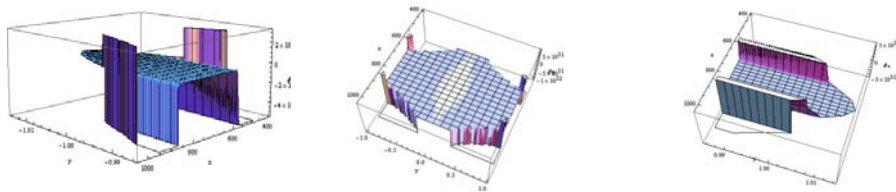


Fig. 9 Distribution of the electric field potential over the thickness of the waveguide $h_-(x) \leq y \leq h_+(x)$

Conclusion. A mathematical modeling of the problem on propagation of electro-elastic wave signal shear in a homogeneous piezoelectric waveguide with filled surface roughness is suggested. Using MELS hypotheses (hypothesis of Magneto Elastic Layered Systems), analytical distribution of the elastic shear and the electric potential in the base layer, as well as in each formed layer of the composite waveguide are built by inputting hypothesis of MELS.

Numerically investigated the amplitude distribution and frequency characteristics of the wave field in the composite waveguide at the propagation of normal wave signal.

References

1. Rayleigh L., On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic, Solid. Proc. London Math. Soc., 1885, vol. s1-17 issue 1, pp. 4–11.
2. Love A.E.H., Some problems of geodynamics, first published in 1911 by the Cambridge University Press and published again in 1967 by Dover, New York, USA. (Chapter 11: Theory of the propagation of seismic waves)
3. Lamb H., On Waves in an Elastic Plat. Proc. Roy. Soc. London, 1917, vol. 93, issue 648, pp. 114–128.
4. Bleustein J.L., A new surface wave in piezoelectric materials, Appl. phys. Lett., 1968, vol. 13, №2, pp. 412-413.
5. Viktorov I. A., Sound surface waves in solids., M.: Nauka, 1981, p. 287 (in Russian)
6. Achenbach, J. D., Wave Propagation in Elastic Solids, New York, Elsevier, 1984, p. 364
7. Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V., Surface acoustic waves in inhomogeneous media, Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 20, 1995, p. 388
8. D. Royer, E. Dieulesaint, Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation, Springer Science & Business Media, 2000, p. 374
9. Brekhovskikh L., Waves in Layered Media 2e, Applied mathematics and mechanics, Elsevier Science, 2012, p. 520
10. Flannery CM, von Kiedrowski H., Effects of surface roughness on surface acoustic wave propagation in semiconductor materials, , 2002, vol. 40, issues 1-8, pp. 83-87
11. Svetovoy V.B., Palasantzas G, Influence of surface roughness on dispersion forces, Adv Colloid Interface Sci., 2015, vol. 216, pp. 1-19
12. S. S. Singh, Love Wave at a Layer Medium Bounded by Irregular Boundary Surfaces, Journal of Vibration and Control, 2011, vol. 17, issue 5, pp. 789–795
13. Catherine Potel, Michel Bruneau, Ludovic C. Foze N'Djomo, Damien Leduc, Mounsif Echcherif Elkettani, Jean-Louis Izbicki, Shear horizontal acoustic waves propagating along two isotropic solid plates bonded with a non-dissipative adhesive layer: Effects of the rough interfaces, J. App. Phys., 2015, vol. 118, issue 22, pp. 118-134
14. B. F. Apostol, The Effect of Surface Inhomogeneities on the Propagation of Elastic Waves, Journal of Elasticity, 2014, vol. 114, issue 1, pp. 85-99
15. Valier-Brasier T., Potel C., Bruneau M, Leduc D, Morvan B, Izbicki J-L, Coupling of shear acoustic waves by gratings: Analytical and experimental analysis of spatial

- periodicity effects, *Acta Acustica United with Acustica*, 2011, vol. 97, issue 5, pp. 717–727
16. Avetisyan A.S., On the formulation of the electro-elasticity theory boundary value problems for electro-magneto-elastic composites with interface roughness, *Proceedings of NAS of Armenia, Mechanics*, 2015, vol. 68, №2, pp. 29-42.
 17. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A., The efficiency of application of virtual cross-sections method and hypotheses MELS in problems of wave signal propagation in elastic waveguides with rough surfaces, *Journal of Advances in Physics*, 2016, vol. 11, №7, pp. 3564-3574
 18. Avetisyan A.S., The boundary problem modelling of rough surfaces continuous media with coupled physical-mechanical fields, *Reports of NAS of Armenia*, 2015, vol. 115, №2, pp. 119-131.
 19. Avetisyan A.S., Kamalyan A.A., and Hunanyan A.A., Features of localization of wave energy at rough surfaces of piezodielectric waveguide, *Proc. of NAS Armenia, ser. Mechanics*, 2017 vol. 70, №1, pp. 40-63
 20. Avetisyan A.S., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B., Magneto-electro- thermo-elastic hypotheses for contact problems of composite waveguides, *The International Conference «Modern problems of thermomechanics»*, 22-25 September, 2016, Lvov, Ukraine, *Collection of scientific papers*, pp. 142-144
 21. Hunanyan A.A., The instability of shear normal wave in elastic waveguide of weakly inhomogeneous material, *Proc. of NAS Armenia, ser. Mechanics*, 2016 vol. 69, №3, pp. 16-27

Funding: This study was funded by RA MES State Committee of Science (grant number 15T-2C026).

Information about the authors:

A.A. Kamalyan – Researcher, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia

Address: 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2

Phone: (+37494) 90-96-92

E-mail: kamalyan.andranik@yahoo.com

A.A. Hunanyan – PhD student, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences, Yerevan, Republic of Armenia

Address: 0019, Yerevan, ave. Baghramyan, 24/2

Phone: (+37491) 77-55-33

E-mail: hunanyan.areg21@gmail.com

A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN NONLOCAL ELASTICITY FOR A THIN LAYER

Kaplunov J., Chebakov R.

Ключевые слова: нелокальность, упругость, асимптотический, пограничный слой, тонкий слой.

Keywords: nonlocal, elasticity, asymptotic, boundary layer, thin layer.

Каплунов Ю.Д., Чебаков Р.А.

Об одной краевой задаче нелокальной теории упругости для тонкого слоя

Аннотация: Тонкий слой со свободной верхней лицевой поверхностью и заданными перемещениями на нижней лицевой поверхности изучается в рамках нелокальной теории упругости. Рассматриваются интегральные уравнения состояния с нелокальным экспоненциальным ядром. Асимптотический анализ показывает существование пограничного слоя, локализованного около свободной лицевой поверхности, а также позволяет определить нелокальную поправку первого порядка к классическим полиномиальным законам распределения напряжений по толщине слоя.

Abstract. A thin layer with a traction-free upper face, subject to prescribed displacements along a lower face, is treated within the framework of nonlocal elasticity. Integral constitutive relations specified for a nonlocal exponential kernel are considered. Asymptotic analysis reveals a boundary layer adjacent to the upper face as well as a first-order nonlocal correction to the classical polynomial stress variation across the thickness.

1. Introduction

Modern challenges of advanced technology inspire numerous developments in micromechanics of solids, e.g. see books by Ambartsumyan [2] and Eringen [8]. In particular, nonlocal models in elasticity find important technical applications, e.g. see Kiani [11], [12], and Arash et al. [3]. It is remarkable that the vast majority of research in this area start not from original integral nonlocal constitutive relations, but from their simplified differential form oriented to analysis of long-wave phenomena with a typical lengthscale much greater than an internal size. The recent insight in Chebakov et al. [5] demonstrates that this assumption is not valid near the boundaries of non-locally elastic solids; see also comments in an earlier publication by Bazant et al. [4].

In this paper we consider a thin layer starting from integral relations in nonlocal elasticity. The upper face of the layer is assumed to be traction-free while a long-wave displacement field is prescribed along the lower face. For the sake of simplicity, the nonlocal exponential kernel is assumed to be dependent only on the vertical co-ordinate. The effect of nonlocal phenomena is investigated using the asymptotic approach originated from Goldenveizer et al. [9], [10], and Aghalovyan [1], see also references therein. The localised components of nonlocal stresses are calculated. A first-order nonlocal correction to the classical 'local' stresses, arising due to the effect of the boundary layer, is determined.

2. Governing relations

Consider an elastic layer of thickness h within the framework of nonlocal elasticity, e.g. see Eringen [7]. The equations of motion in Cartesian co-ordinates (x_1, x_2, x_3) are given by

$$s_{mn,m} = \rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \quad (1)$$

with $s_{mn}, m, n = 1, 2, 3$ nonlocal stresses, u_n displacement vector, ρ volume density, and t time. The nonlocal stresses are expressed as

$$s_{mn}(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x_3' - x_3)^2}{a^2}\right] (\lambda e_{ll}(x_1, x_2, x_3') \delta_{mn} + 2\mu e_{mn}(x_1, x_2, x_3')) dx_3', \quad (2)$$

where a is an internal characteristic length, δ_{mn} the Kronecker's delta, and λ and μ are the Lamé constants, and linear elastic strains are given by

$$e_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right), \quad (3)$$

The boundary conditions along the free face $x_3 = 0$ and the kinematically excited face $x_3 = h$ take the form

$$s_{3n} = 0 \quad (4)$$

and

$$u_n = U_n, \quad (5)$$

where $U_n(x_1, x_2, t)$ are given displacements.

3. Small parameters and scaling

Let us assume that the thickness of the layer h is much smaller than a typical wavelength ℓ along the tangential direction ($h/\ell \ll 1$) and at the same time is much greater than the internal size a ($a/h \ll 1$), see Figure 1. In what follows, we restrict ourselves to a single small parameter defined by

$$\theta = \frac{a}{h} = \sqrt{\frac{h}{\ell}} \ll 1. \quad (6)$$

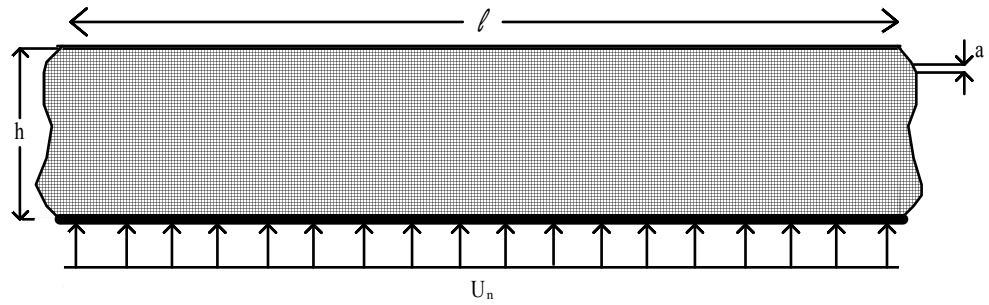


Figure 1: An elastic layer treated in the framework of nonlocal elasticity.

We adapt the asymptotic approach, developed earlier in [9], [10] and [1], beginning with scaling of the original variables by

$$x_i = \ell \xi_i, \quad x_3 = h \zeta_p = a \zeta_q \quad \text{and} \quad t = \frac{\ell}{c_2} \tau, \quad (7)$$

using for the first time two dimensionless transverse variables, ζ_p and ζ_q normalised by the thickness and microscale, respectively. We also specify dimensionless quantities of order unity, including displacements

$$u_n = \ell v_n, \quad (8)$$

strains

$$e_{ii} = \varepsilon_{ii}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij}, \quad e_{33} = \varepsilon_{33}, \quad (9)$$

and nonlocal stresses

$$\begin{aligned} s_{ii} &= \mu(p_{ii} + q_{ii}), \quad s_{ij} = \mu(p_{ij} + q_{ij}), \\ s_{3i} &= \theta^2 \mu(p_{3i} + \theta q_{3i}), \quad s_{33} = \theta^2 \mu(p_{33} + \theta^2 q_{33}). \end{aligned} \quad (10)$$

In the above, the $p_{mn}(\zeta_p)$ components of nonlocal stresses are similar to those in classical linear elasticity, whereas $q_{mn}(\zeta_q)$ components correspond to the boundary layers characteristic of nonlocal elasticity only. In what follows, we also need one more dimensionless quantity of order unity, δ_{i3} , defined by

$$\theta^2 \delta_{i3} = \frac{\partial v_i}{\partial \zeta_p}, \quad (11)$$

4. Asymptotic expansions

Let us expand all the dimensionless quantities into asymptotic series as

$$\begin{pmatrix} v_n \\ p_{mn} \\ q_{mn} \\ \varepsilon_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n^{(0)} \\ p_{mn}^{(0)} \\ q_{mn}^{(0)} \\ \varepsilon_{mn}^{(0)} \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ p_{mn}^{(1)} \\ q_{mn}^{(1)} \\ \varepsilon_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots \quad (12)$$

Substitution of these expansions into the relations in the previous sections results, at leading and first orders ($k = 0, 1$), in the following equations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \zeta_p} &= 0, \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial \zeta_p} = 0, \\
\varepsilon_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^{(k)}}{\partial \xi_i} \right), \varepsilon_{ii}^{(k)} = \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial \xi_i}, \\
p_{ij}^{(k)} + q_{ij}^{(k)} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp[-(\zeta_q - \zeta_q')^2] \varepsilon_{ij}^{(k)} d\zeta_q', \\
p_{ii}^{(k)} + q_{ii}^{(k)} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp[-(\zeta_q - \zeta_q')^2] \left(4(1 - \kappa^2) \varepsilon_{ii}^{(k)} + 2(1 - 2\kappa^2) \varepsilon_{jj}^{(k)} \right) d\zeta_q', \\
\frac{\partial p_{3i}^{(k)}}{\partial \zeta_p} + \frac{\partial q_{3i}^{(k)}}{\partial \zeta_q} &= -\frac{\partial (p_{ii}^{(k)} + q_{ii}^{(k)})}{\partial \xi_i} - \frac{\partial (p_{ij}^{(k)} + q_{ij}^{(k)})}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 v_i^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\partial p_{33}^{(0)}}{\partial \zeta_p} &= \frac{\partial^2 v_3^{(0)}}{\partial \tau^2} \\
\frac{\partial p_{33}^{(1)}}{\partial \zeta_p} + \frac{\partial q_{33}^{(0)}}{\partial \zeta_p} &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

along with the boundary conditions at $\zeta_p = 0$

$$\begin{aligned}
p_{3i}^{(0)} &= 0, p_{33}^{(0)} = 0, \\
p_{3i}^{(1)} + q_{3i}^{(0)} &= 0, p_{33}^{(1)} = 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

and at $\zeta_p = 1$

$$\begin{aligned}
v_n^{(0)} &= w_n, \\
v_n^{(1)} &= 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

where $w_n = U_n / \ell$.

On integrating of (13) in ζ_p and also in ζ_q for q_{mn} stress components and satisfying the boundary conditions (14) and (15), we have

$$\begin{aligned}
v_n^{(0)} &= w_n, \\
\varepsilon_{ij}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi_i} \right), \varepsilon_{ii}^{(0)} = \frac{\partial w_i}{\partial \xi_i}, \\
v_n^{(1)} &= 0, \\
\varepsilon_{ij}^{(1)} &= 0, \varepsilon_{ii}^{(1)} = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(0)} &= \frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi_i}, \\
p_{ii}^{(0)} &= 4(1 - \kappa^2) \frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} + 2(1 - 2\kappa^2) \frac{\partial w_j}{\partial \xi_j}, \\
p_{3i}^{(0)} &= -\zeta_p \left[4(1 - \kappa^2) \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2} + (3 - 4\kappa^2) \frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_j^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \tau^2} \right], \\
p_{33}^{(0)} &= \zeta_p \frac{\partial^2 w_3}{\partial \tau^2}, \\
p_{ij}^{(1)} &= 0, \\
p_{ii}^{(1)} &= 0, \\
p_{3i}^{(1)} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[4(1 - \kappa^2) \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2} + (3 - 4\kappa^2) \frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_j^2} \right], \\
p_{33}^{(1)} &= 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

and

$$\begin{aligned}
q_{ij}^{(0)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi_i} \right) \text{erfc}(\zeta_q), \\
q_{ii}^{(0)} &= -\left(2(1 - \kappa^2) \frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} + (1 - 2\kappa^2) \frac{\partial w_j}{\partial \xi_j} \right) \text{erfc}(\zeta_q), \\
q_{3i}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left[4(1 - \kappa^2) \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2} + (3 - 4\kappa^2) \frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \tau^2} \right] Q(\zeta_q),
\end{aligned} \tag{18}$$

where $\text{erfc}(\zeta_q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta_q}^{\infty} e^{-t^2} dt$ and

$$Q(\zeta_q) = \zeta_q \text{erfc}(\zeta_q) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-\zeta_q^2]. \tag{19}$$

This function characterising the boundary layer component of the stresses S_{3i} is plotted in Figure 2 for $\theta = 0.2$, 0.1 , and 0.05 , where as before $\theta = a / h$.

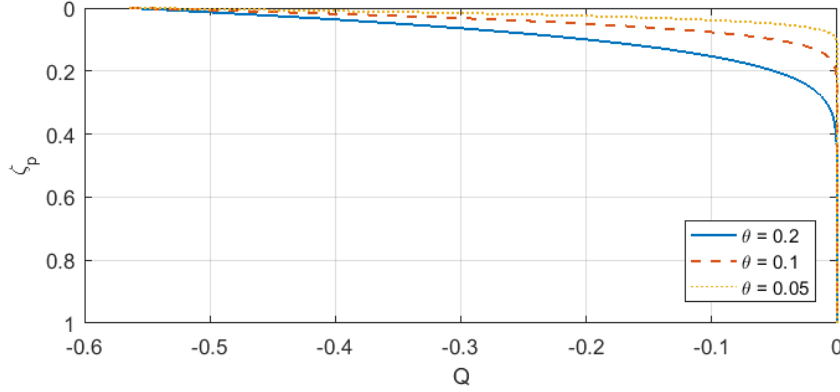


Figure 2: The boundary layer component of the nonlocal stresses s_{3i} , $i = 1, 2$.

The formulae (16)-(18) describe the variation of displacements, strains and stresses across the thickness of the layer. In particular, for the nonlocal stresses s_{3i} and s_{33} we obtain in the original variables

$$s_{3i} = \rho x_3 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \rho c_2^2 \left[4(1 - \kappa^2) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} + (3 - 4\kappa^2) \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right] \times \left[-x_3 + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + Q \right) \right],$$

$$s_{33} = \rho x_3 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \quad (20)$$

At $a = 0$ these expressions coincide with those in classical elasticity, e.g. see Dai et al. [6]. At $0 < a \ll x_3$, the boundary layer term Q in the first formula above is exponentially small. In this case we have

$$s_{3i} = \rho x_3 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \rho c_2^2 \left[4(1 - \kappa^2) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} + (3 - 4\kappa^2) \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right] \left(-x_3 + \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \right),$$

$$s_{33} = \rho x_3 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \quad (21)$$

Nevertheless, the last formula for s_{3i} still involves a uniform in x_3 first-order nonlocal correction. As it is shown in [5], one can formulate, within the framework of classical elasticity, refined boundary conditions along a free surface resulting in formulae (21) outside a narrow near-surface zone. The aforementioned refined boundary conditions are also

implemented in [5] for calculation of a first-order nonlocal correction for the Rayleigh wave speed. It is worth mentioning that the differential form of nonlocal equations allows only a second-order correction to the Rayleigh wave speed, e.g. see [7].

5. Conclusion

The studied effect of nonlocal phenomena results in a boundary layer adjustment to the traction-free face. The interaction of the boundary layer and the conventional stress field with a polynomial variation across the thickness leads to a first-order nonlocal correction to the classical, i.e. 'local', solution.

References

- [1] Aghalovyan, L., 2015. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. World Scientific Publishing Company Incorporated.
URL <http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/9048>
- [2] Ambartsumyan, S. A., 1999. Micropolar theory of shells and plates. Erevan: National Academy of Sciences of Armenia.
- [3] Arash, B., Wang, Q., 2012. A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Computational Materials Science* 51 (1), 303–313.
URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.07.040>
- [4] Bazant, Z. P., Le, J.-L., Hoover, C. G., 2010. Nonlocal boundary layer (NBL) model: overcoming boundary condition problems in strength statistics and fracture analysis of quasibrittle materials. *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures. Recent Advances in Fracture Mechanics of Concrete*, B.-H. Oh, Ed., Korea Concrete Institute, Seoul, 135–143.
- [5] Chebakov, R., Kaplunov, J., Rogerson, G. A., 2016. Refined boundary conditions on the free surface of an elastic half-space taking into account non-local effects. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 472 (2186).
URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/472/2186/20150800>
- [6] Dai, H.-H., Kaplunov, J., Prikazchikov, D. A., 2010. A long-wave model for the surface elastic wave in a coated half-space. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 466 (2122), 3097–3116.
URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2010.0125>
- [7] Eringen, A. C., 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics* 54 (9), 4703–4710.
URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.332803>
- [8] Eringen, A. C., 2002. Nonlocal continuum field theories. Springer-Verlag New York.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/b97697>
- [9] Goldenveizer, A. L., 1976. Theory of elastic thin shells. Moscow: Nauka.
- [10] Goldenveizer, A. L., Kaplunov, J. D., Nolde, E. V., 1993. On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells. *International Journal of Solids and Structures* 30 (5), 675–694.
URL [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90029-7](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(93)90029-7)

[11] Kiani, K., 2011 a . Nonlocal continuum-based modeling of a nanoplate subjected to a moving nanoparticle. part i: Theoretical formulations. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures 44 (1), 229 – 248.

URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386947711003067>

[12] Kiani, K., 2011 b . Nonlocal continuum-based modeling of a nanoplate subjected to a moving nanoparticle. part ii: Parametric studies. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures 44 (1), 249 – 269.

URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386947711003079>

Сведения об авторах:

Kaplunov, Julius – Professor of Applied Mathematics, School of Computing and Mathematics, Keele University

Email: j.kaplunov@keele.ac.uk

Chebakov, Roman – PhD student in Applied Mathematics, School of Computing and Mathematics, Keele University

Email: r.chebakov@keele.ac.uk

Вместо предисловия	5
Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ НА КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ ФЛАТТЕРА И НА АМПЛИТУДУ ФЛАТТЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ	6
Агаловян Л.А., Тагворян В.В. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СЕЙСМОЛОГИИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН.....	24
Аветисян А.С., Мусий Р.С., Мельник Н.Б., Ивасько Р.А. ТЕРМОМЕХАНИКА БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ	36
Акопян В.Н., Амирджян А.А. НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ РАВНОМЕРНО СЛОИСТОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВОЙКО-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВНУТРЕННИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ	47
Амирбемян А.Н., Мхитарян С.М., Шемян Л.А. О ВДАВЛИВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАЛОК В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ ..	58
Арутюнян Р.А. ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ	67
Барсегян В.Р. ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ СТЕРЖНЯ С ЗАДААННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ	76
Белубекян В.М., Терзян С.А. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ СОСТАВНОЙ СВОБОДНО ОПЁРТОЙ ПЛАСТИНКИ	88
Белубекян М.В. УСЛОВИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАСТЯНУТОЙ ПЛАСТИНКИ	93
Гачкевич А.Р., Казарян К.Б., Терлецкий Р.Ф. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНОТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЧАСТИЧНО ПРОЗРАЧНЫХ ТЕЛАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ	99
Казарян К.Б., Казарян Р.А., Папян А.А. ВОЛНЫ ФЛОКЕ В НЕОДНОРОДНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ	110
Карапетян К.А. О СРАВНЕНИИ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ БЕТОНОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ	118
Мовсисян Л.А. К УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК	127
Саркисян С.В. О ВОЛНАХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ	133

Сейранян С.П. О ПАРАДОКСЕ В ПОВЕДЕНИИ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПРИЛОЖЕ- НИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ	141
Avetisyan A.S., Khurshudyan As.Zh. ON JUSTIFICATION OF AMBAR- TSUMIAN'S PLATE THEORY VIA Γ -CONVERGENCE.....	151
Galichyan T.A., Khurshudyan As.Zh. PARAMETER OPTIMIZATION FOR LAMINATED MULTIFERROIC COMPOSITES	159
Kamalyan A.A., Hunanyan A.A. THE PROPAGATION OF HIGH-FREQUENCY ELECTROELASTIC (SH) WAVE SIGNAL IN HOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC LAYER WAVEGUIDE WITH MECHANICALLY RIGIDLY CLAMPED AND ELECTRICALLY OPEN (OR ELECTRICALLY CLOSED) WEAKLY INHOMOGENEOUS SURFACES	167
Kaplunov J., Chebakov R.A. BOUNDARY VALUE PROBLEM IN NONLOCAL ELASTICITY FOR A THIN LAYER	181