РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ЗОНАМИ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ (ЗАДАЧА ГАЛИНА) МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

А.В.Саакян

Институт механики НАН РА, Ереван, Армения, avsahakyan@gmail.com

В предлагаемой работе решение контактной задачи о вдавливании штампа в упругую полуплоскость, когда зона контакта разбивается на участки сцепления и проскальзывания с трением, сводится к системе из трех сингулярных интегральных уравнений относительно тангенциального и нормального напряжений в зоне сцепления и контактного давления в зоне проскальзывания. Решение такой системы строится посредством прямого численного интегрирования определяющих уравнений методом дискретных особенностей. На основе численного анализа показана сходимость вычислительного процесса в зависимости от порядка интерполяционных формул. Построены графики распределения контактных напряжений, исследована зависимость длины зоны сцепления от коэффициента трения и коэффициента Пуассона.

1. Введение. Контактная задача о вдавливании штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость, когда зона контакта разбивается на участки сцепления и проскальзывания с трением, впервые была рассмотрена Л.А.Галиным [1]. При помощи конформного отображения было построено приближенное решение в замкнутом виде. Известно решение задачи Галина с применением уравнения класса Фукса [2], а также ее сведение к векторной задаче Римана [3]. В работе [4] с использованием метода Винера-Хопфа решение данной задачи сведено к бесконечной системе алгебраических уравнений. В этой же работе приводятся численные результаты, по которым можно провести сравнение результатов, полученных разными методами.

В предлагаемой работе решение задачи Галина сводится к системе трех сингулярных интегральных уравнений относительно тангенциального и нормального напряжений в зоне сцепления и контактного давления в зоне проскальзывания. Решение этой системы строится посредством прямого численного интегрирования методом дискретных особенностей [5]. На основе численного анализа показана сходимость вычислительного процесса в зависимости от порядка интерполяционных формул. Построены графики распределения контактных напряжений при различных значениях коэффициента трения и коэффициента Пуассона, а также кривые зависимости длины зоны сцепления от тех же характеристик.

2. Постановка задачи. Пусть жесткий штамп с плоским основанием длиной $2a$ под действием сосредоточенной нормальной силы P вдавливается в упругую полуплоскость. Рассмотрим случай, когда сила приложена к середине штампа, т.е. имеется ось симметрии, вдоль которой направим ось ординат. Предположим, что в средней части $(-b,b)$ зоны контакта имеет место сцепление, а у концов происходит скольжение (рис.1). При этом полагаем, что на участках скольжения тангенциальное напряжение $q(x)$ подчиняется закону Кулона

$$q(x)=\begin{cases}\theta\, p(x) & x\in(-a,-b)\\ -\theta\, p(x) & x\in(a,b)\end{cases} \tag{1}$$

где θ - коэффициент трения, $p(x)$ - нормальное давление.

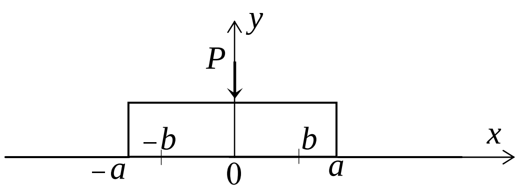

Рис. 1 Схема контакта жесткого штампа и полуплоскости.

Для граничных точек полуплоскости в зоне контакта имеем [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1-2\nu}{2\mu}p(x)+\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(t)}{t-x}dt\ , \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1-2\nu}{2\mu}q(x)+\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)}{t-x}dt \tag{2}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - горизонтальная и вертикальная компоненты перемещения границы полуплоскости, μ - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона.

Имеем следующие условия контакта:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0 \text{ при } |x|<b \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ q(x)=-\theta\,\mathrm{sgn}(x)\,p(x) \text{ при } b<|x|<a \tag{3}$$

Кроме того, имеет место условие равновесия штампа, выражаемое формулой:

$$\int_{-a}^{a} p(t)\,dt=P \tag{4}$$

Перейдем к безразмерным величинам:

$$t=a\tau;\quad x=as;\quad b^*=\frac{b}{a};\quad q^*(\tau)=\frac{a\,q(a\tau)}{P};\quad p^*(\tau)=\frac{a}{P}p(a\tau) \tag{5}$$

и подставим представления (2) в условия контакта (3). С учетом нечетности $q^*(\tau)$ и четности $p^*(\tau)$ получим следующую систему уравнений:

$$\int_0^{b^*}\left[\frac{1}{\tau-s}+\frac{1}{\tau+s}\right]q^*(\tau)\,d\tau-\theta\int_{b^*}^{1}\left[\frac{1}{\tau-s}+\frac{1}{\tau+s}\right]p^*(\tau)\,d\tau+\kappa p^*(s)=0 \qquad \left(s<b^*\right)$$

$$\int_0^{1}\left[\frac{1}{\tau-s}-\frac{1}{\tau+s}\right]p^*(\tau)\,d\tau-\kappa q^*(s)=0 \qquad \left(0<s<b^*\right) \tag{6}$$

$$\int_0^{1}\left[\frac{1}{\tau-s}-\frac{1}{\tau+s}\right]p^*(\tau)\,d\tau+\kappa\theta\, p^*(s)=0 \qquad \left(b^*<s<1\right); \qquad \kappa=\frac{\pi}{2}\frac{1-2\nu}{1-\nu}$$

при этом условие равновесия (4) примет вид

$$\int_{-1}^{1} p^*(\tau)\,d\tau=1 \tag{7}$$

Рассматривая контактное давление $p^*(\xi)$ как самостоятельную функцию на каждом из участков сцепления и проскальзывания: $g(\xi)$ при $\xi<b^*$ и $h(\xi)$ при $b^*<\xi<1$, система уравнений (6) и условие равновесия (7) примут вид

$$\int_0^{b^*}\left[\frac{1}{\tau-s}+\frac{1}{\tau+s}\right]q^*(\tau)\,d\tau-\theta\int_{b^*}^{1}\left[\frac{1}{t-s}+\frac{1}{t+s}\right]h(t)\,dt+\kappa g(s)=0 \qquad \left(0<s<b^*\right)$$

$$\int_0^{b^*}\left[\frac{1}{\tau-s}-\frac{1}{\tau+s}\right]g(\tau)\,d\tau+\int_{b^*}^{1}\left[\frac{1}{t-s}-\frac{1}{t+s}\right]h(t)\,dt-\kappa q^*(s)=0 \qquad \left(0<s<b^*\right) \tag{8}$$

$$\int_0^{b^*}\left[\frac{1}{\tau-\sigma}-\frac{1}{\tau+\sigma}\right]g(\tau)\,d\tau+\int_{b^*}^1\left[\frac{1}{t-\sigma}-\frac{1}{t+\sigma}\right]h(t)\,dt+\kappa\theta h(\sigma)=0 \qquad \left(b^*<\sigma<1\right)$$

$$2\int_0^{b^*}g(\tau)\,d\tau+2\int_{b^*}^1 h(\tau)\,d\tau=1 \tag{9}$$

При помощи замены переменных

$$\{\tau,s\}=\frac{b^*}{2}\left(1+\{\xi,\zeta\}\right),\quad \{t,\sigma\}=\frac{1-b^*}{2}\{\xi,\zeta\}+\frac{1+b^*}{2} \qquad \left(-1<\{\xi,\zeta\}<1\right) \tag{10}$$

и введения новых неизвестных функций

$$X(\xi)=q^*\left(\frac{b^*}{2}(1+\xi)\right);\quad Y(\xi)=g\left(\frac{b^*}{2}(1+\xi)\right);\quad Z(\xi)=h\left(\frac{1-b^*}{2}\xi+\frac{1+b^*}{2}\right) \tag{11}$$

систему (8) запишем в виде:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\zeta}+\frac{1}{\xi+\zeta+2}\right]X(\xi)\,d\xi-\theta\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\xi+\dfrac{1-b^*\zeta}{1-b^*}}+\frac{1}{\xi+\dfrac{1+2b^*+b^*\zeta}{1-b^*}}\right)Z(\xi)\,d\xi+\kappa Y(\zeta)=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\zeta}-\frac{1}{\xi+\zeta+2}\right]Y(\xi)\,d\xi+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\xi+\dfrac{1-b^*\zeta}{1-b^*}}-\frac{1}{\xi+\dfrac{1+2b^*+b^*\zeta}{1-b^*}}\right)Z(\xi)\,d\xi-\kappa X(\zeta)=0 \tag{12}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\dfrac{1+\left(1-b^*\right)\zeta}{b^*}}-\frac{1}{\xi+\dfrac{1+2b^*+\left(1-b^*\right)\zeta}{b^*}}\right]Y(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\zeta}-\frac{1}{\xi+\zeta+2\dfrac{1+b^*}{1-b^*}}\right]Z(\xi)\,d\xi+\kappa\theta Z(\zeta)=0$$

причем аргумент ζ принадлежит интервалу $(-1,1)$.

Условие равновесия (9) тогда примет вид:

$$b^*\int_{-1}^{1}Y(\xi)\,d\xi+\left(1-b^*\right)\int_{-1}^{1}Z(\xi)\,d\xi=1 \tag{13}$$

Очевидно, что неизвестные функции $X(\xi)$ и $Y(\xi)$ являются непрерывными функциями, принимающими конечные значения на обоих концах отрезка интегрирования, функция же $Z(\xi)$ на правом конце неограниченна. Из подробного анализа поведения уравнений в концевых точках отрезка интегрирования и проведенного численного эксперимента можно установить, что неизвестные функции в системе (12) целесообразно представить в виде

$$X(\xi)=(1+\xi)C+X^*(\xi)(1-\xi)^{\alpha}$$

$$Y(\xi)=-\frac{2C}{\theta}+Y^*(\xi)(1-\xi)^{\alpha} \tag{14}$$

$$Z(\xi)=-2^{\alpha}\frac{C}{\theta}(1-\xi)^{1-\alpha}+\frac{Z^*(\xi)(1+\xi)^{\alpha}}{(1-\xi)^{\alpha}} \qquad \left(0<\alpha=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\theta\kappa}{\pi}\right)<1\right)$$

где C - постоянная, подлежащая определению, $X^*(\xi), Y^*(\xi), Z^*(\xi)$ - гельдеровские функции, ограниченные на отрезке $[-1,1]$.

Неизвестные функции $X^*(\xi)$, $Y^*(\xi)$ и $Z^*(\xi)$ заменим интерполяционными многочленами:

$$\left\{X^*(x),Y^*(x)\right\}=\frac{2}{n+\alpha+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left\{X^*(\xi_j),Y^*(\xi_j)\right\}P_n^{(\alpha,0)}(x)}{(x-\xi_j)P_{n-1}^{(1+\alpha,1)}(\xi_j)}, \qquad P_n^{(\alpha,0)}(\xi_j)=0 \tag{15}$$

$$Z^*(x)=\frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{Z^*(\zeta_j)P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)}{(x-\zeta_j)P_{n-1}^{(1-\alpha,1+\alpha)}(\zeta_j)}, \qquad P_n^{(-\alpha,\alpha)}(\zeta_j)=0 \qquad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{16}$$

Воспользовавшись квадратурными формулами для сингулярных и регулярных интегралов [6] и выбирая в качестве точек коллокации по методу дискретных особенностей [5] корни функций Якоби второго рода, соответствующих многочленам $P_n^{(\alpha,0)}(\xi)$ и $P_n^{(-\alpha,\alpha)}(\xi)$, систему интегральных уравнений (12), вместе с уравнением равновесия (13), заменим следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}m_{j,k}^{1x}X^*(\xi_j)+\kappa(1-x_k)^{\alpha}\sum_{j=1}^{n}m_{j,k}^{1y}Y^*(\xi_j)-\theta\sum_{j=1}^{n}m_{j,k}^{1z}Z^*(\zeta_j)+m_k^{1C}C+\gamma_1=0 \quad k=\overline{1,n+1}$$

$$-\kappa\left(1-x_k\right)^{\alpha}\sum_{j=1}^{n} m_{j,k}^{2x} X^*\left(\xi_j\right)+\sum_{j=1}^{n} m_{j,k}^{2y} Y^*\left(\xi_j\right)+\sum_{j=1}^{n} m_{j,k}^{2z} Z^*\left(\zeta_j\right)+m_k^{2C}C+\gamma_2=0 \qquad k=\overline{1,n+1}$$

$$\kappa\sum_{j=1}^{n} m_{j,k}^{3y} Y^*\left(\xi_j\right)-\theta\sum_{j=1}^{n} m_{j,k}^{3z} Z^*\left(\zeta_j\right)+m_k^{3C}C=0 \qquad k=\overline{1,n} \quad (17)$$

$$b^*\sum_{j=1}^{n} m_j^{e} Y^*\left(\xi_j\right)+\left(1-b^*\right)\sum_{j=1}^{n} m_j^{e} Z^*\left(\zeta_j\right)+m^{e}C=1$$

где

$$m_{i,k}^{1x}=w_i^{(\alpha,0)}\left[\frac{1}{\xi_i-x_k}+\frac{1}{\xi_i+x_k+2}\left(1-\frac{R_n^{(\alpha,0)}\left(-x_k-2\right)}{R_n^{(\alpha,0)}\left(\xi_i\right)}\right)\right] \; ;$$

$$m_{i,k}^{1y}=\frac{w_i^{(\alpha,0)}}{x_k-\xi_i}\frac{P_n^{(\alpha,0)}\left(x_k\right)}{R_n^{(\alpha,0)}\left(\xi_i\right)} \; ;$$

$$m_{i,k}^{1z}=\frac{w_i^{(-\alpha,\alpha)}}{\zeta_i+\frac{1-b^*x_k}{1-b^*}}\left(1-\frac{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(-\frac{1-b^*x_k}{1-b^*}\right)}{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\zeta_i\right)}\right)+$$

$$+\frac{w_i^{(-\alpha,\alpha)}}{\zeta_i+\frac{1+2b^*+b^*x_k}{1-b^*}}\left(1-\frac{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(-\frac{1+2b^*+b^*x_k}{1-b^*}\right)}{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\zeta_i\right)}\right);$$

$$m_k^{1C}=4-\frac{2\kappa}{\theta}-2\left(1+x_k\right)\operatorname{arcth}\frac{1+x_k}{2}+\frac{16}{\left(1-b^*\right)^{1-\alpha}}\int_0^{1-b^*}\frac{\left(1-t\right)t^{1-\alpha}}{4\left(1-t\right)^2-b^{*2}\left(1+x_k\right)^2}dt \, ;$$

$$m_{i,k}^{2x}=\frac{w_i^{(\alpha,0)}}{x_k-\xi_i}\frac{P_n^{(\alpha,0)}\left(x_k\right)}{R_n^{(\alpha,0)}\left(\xi_i\right)} \; ;$$

$$m_{i,k}^{2y}=w_i^{(\alpha,0)}\left[\frac{1}{\xi_i-x_k}-\frac{1}{\xi_i+x_k+2}\left(1-\frac{R_n^{(\alpha,0)}\left(-x_k-2\right)}{R_n^{(\alpha,0)}\left(\xi_i\right)}\right)\right] \; ;$$

$$m_{i,k}^{2z}=\frac{w_i^{(-\alpha,\alpha)}}{\zeta_i+\dfrac{1-b^*x_k}{1-b^*}}\left(1-\frac{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(-\dfrac{1-b^*x_k}{1-b^*}\right)}{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\zeta_i\right)}\right)-$$

$$-\frac{w_i^{(-\alpha,\alpha)}}{\zeta_i+\dfrac{1+2b^*+b^*x_k}{1-b^*}}\left(1-\frac{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(-\dfrac{1+2b^*+b^*x_k}{1-b^*}\right)}{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\zeta_i\right)}\right);$$

$$m_k^{2C}=-\frac{2}{\theta}\ln\frac{\left(1-x_k\right)}{\left(3+x_k\right)}-\frac{8b^*\left(1+x_k\right)}{\theta\left(1-b^*\right)^{1-\alpha}}\int_0^{1-b^*}\frac{t^{1-\alpha}}{4\left(1-t\right)^2-b^{*2}\left(1+x_k\right)^2}dt-\kappa\left(1+x_k\right);$$

$$m_{i,k}^{3x}=0;$$

$$m_{i,k}^{3y}=\frac{w_i^{(\alpha,0)}}{\xi_i-\dfrac{1+\left(1-b^*\right)z_k}{b^*}}\left(1-\frac{R_n^{(\alpha,0)}\left(\dfrac{1+\left(1-b^*\right)z_k}{b^*}\right)}{R_n^{(\alpha,0)}\left(\xi_i\right)}\right)-$$

$$-\frac{w_i^{(\alpha,0)}}{\xi_i+\dfrac{1+2b^*+\left(1-b^*\right)z_k}{b^*}}\left(1-\frac{R_n^{(\alpha,0)}\left(-\dfrac{1+2b^*+\left(1-b^*\right)z_k}{b^*}\right)}{R_n^{(\alpha,0)}\left(\xi_i\right)}\right);$$

$$m_{i,k}^{3z}=\frac{w_i^{(-\alpha,\alpha)}}{\zeta_i-z_k}-\frac{w_i^{(-\alpha,\alpha)}}{\zeta_i+z_k+2\dfrac{1+b^*}{1-b^*}}\left(1-\frac{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(-z_k-2\dfrac{1+b^*}{1-b^*}\right)}{R_n^{(-\alpha,\alpha)}\left(\zeta_i\right)}\right);$$

$$m_k^{3C}=-\frac{2}{\theta}\ln\frac{\left(1+z_k\right)\left(1-b^*\right)}{1+3b^*+z_k\left(1-b^*\right)}-\frac{2^\alpha}{\theta}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\left(1-\xi\right)^{1-\alpha}}{\xi-z_k}-\frac{\left(1-\xi\right)^{1-\alpha}}{\xi+z_k+2\dfrac{1+b^*}{1-b^*}}\right]d\xi-2\kappa\left(\frac{1-z_k}{2}\right)^{1-\alpha};$$

$$w_i^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{\alpha+\beta+3}}{\left(1-\xi_i^2\right)}\frac{\Gamma\left(\alpha+n+1\right)\Gamma\left(\beta+n+1\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+n+1\right)}\left[\frac{1}{\left(\alpha+\beta+n+1\right)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\left(\xi_i\right)}\right]^2;$$

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\left(\frac{2}{z+1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) F\left[n+1, n+\beta+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1+z}\right];$$

$x_k\left(k=\overline{1,n+1}\right)$ и $z_k\left(k=\overline{1,n}\right)$ - корни функций второго рода $R_n^{(\alpha,0)}(x)$ и $R_n^{(-\alpha,\alpha)}(x)$.

Отметим, что в систему (17), следуя работе [7], введены две дополнительные неизвестные γ_1 и γ_2, с целью получить замкнутую систему. Поскольку, помимо явно присутствующих в (17) неизвестных, неизвестной остается еще и относительная длина зоны сцепления b^*, то обращение дополнительно введенных неизвестных γ_1 и γ_2 в ноль должно стать условием для определения b^*. Для выявления этого факта вычислим значения γ_1 и γ_2 для различных значений b^* при разных порядках интерполяции n (рис. 2).

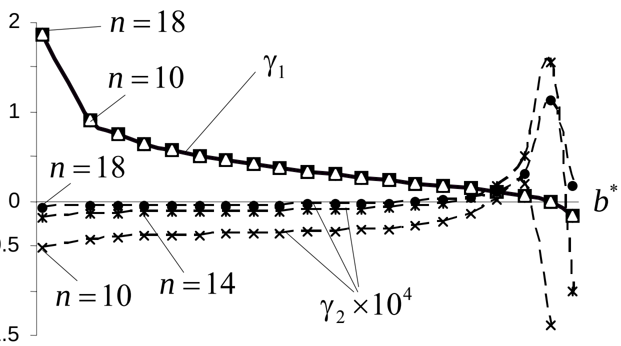

Рис. 2. Зависимость регуляризирующих неизвестных от параметра b^*.

На рис.2 в виде графиков показаны зависимости регуляризирующих неизвестных γ_1 (сплошная линия) и $\gamma_2\times10^4$ (пунктирные линии) от параметра $0<b^*<1$, представляющего относительную длину зоны сцепления, при различных значениях порядка аппроксимации $n=10$, 14 и 18. Нетрудно заметить, что на рисунке присутствует лишь одна сплошная линия, но с разными маркерами, что означает практическую независимость величины γ_1 от порядка аппроксимации. При этом маркеры, соответствующие $n=14$, не отмечены, ввиду их слияния с двумя остальными. Кроме того, видно, что эта линия только один раз меняет знак. В то время как вторая неизвестная γ_2, будучи уже малой величиной, существенно зависит от порядка аппроксимации и, можно сказать, стремится к нулю при его возрастании.

Исходя из изложенного, можно заключить, что обращение в ноль неизвестной γ_1 может служить условием для определения неизвестной длины зоны сцепления, а величина неизвестной γ_2 - показателем близости приближенного решения к истинному решению. Для более ясного представления о степени близости указанных величин, а также о сходимости вычислительного процесса приведем табличные данные об изменении величины b^* с увеличением порядка интерполяции.

Таблица 1. Сходимость результатов

n	b^*	γ_1	γ_2	C	$X^*(-1)$
6	0.68965	8.3×10^{-7}	-2.9×10^{-4}	-0.068995	3.2×10^{-4}
8	0.6893	6.5×10^{-6}	-7.8×10^{-5}	-0.068918	1.2×10^{-4}
10	0.6892	4.6×10^{-7}	-2.7×10^{-5}	-0.068894	5.9×10^{-5}
14	0.68912	1.2×10^{-6}	-4.9×10^{-6}	-0.068877	1.9×10^{-5}
18	0.689104	2.4×10^{-7}	-8.6×10^{-7}	-0.068871	8.4×10^{-6}
22	0.689097	2.7×10^{-8}	6.7×10^{-8}	-0.068869	4.3×10^{-6}
26	0.689092	2.9×10^{-7}	2.7×10^{-7}	-0.068867	2.5×10^{-6}

В табл. 1 приведены данные, полученные из результатов счета для $\nu = 0.3$, $\theta = 0.3$. Данные четвертого столбца очевидным образом подтверждают сказанное выше о неизвестной γ_2, тогда как стабильность значений b^*, при которых неизвестная γ_1 обращается в ноль (точнее, принимает значение, не превосходящее значение γ_2), подтверждает сделанные выше выводы в отношении неизвестной γ_1. Стабильность значений постоянной C, являющейся одной из неизвестных системы (17), указывает на сходимость вычислительного процесса в целом. Последний столбец таблицы 1 указывает на обращение в ноль тангенциальных контактных напряжений в середине зоны контакта, обязательное в силу их нечетности.

Во избежание вопроса о единственности способа введения дополнительных неизвестных, следует отметить, что они могут быть введены во все три группы коллокационных уравнений в произвольной комбинации. В пределах точности решения для выбранного порядка интерполяции результаты будут одинаковые.

В литературе нередко встречаются работы, в которых проблема решения переполненных систем, подобных (17), разрешается путем отбрасывания лишних уравнений. На примере системы (17), проверим верность такого подхода.

Отбросив одно из коллокационных уравнений и временно не принимая во внимание условие равновесия - последнее уравнение системы (17), будем иметь однородную систему из $3n+1$ уравнений. Из условия разрешимости этой системы, т.е. равенства нулю главного детерминанта, находится неизвестная b^*. Для выяснения степени влияния произвола в отбрасывании одного из коллокационных уравнений на значение неизвестной b^*, в таблице 2 приведены ее значения, рассчитанные при $n=10$ для $\nu=0.3$, $\theta=0.3$, в случае подобного отбрасывания.

Таблица 2. Значения b^* при отбрасывании k-ого уравнения.

k	Из первой группы уравнений (17)	Из второй группы уравнений (17)	Из третьей группы уравнений (17)
1	0.689194	0.689192	0.689833
2	0.689185	0.689192	0.694746
3	0.689206	0.689193	0.696197
4	0.689169	0.689192	0.780002
5	0.689225	0.689195	0.706187
6	0.689148	0.689188	0.669418
7	0.689250	0.689204	0.711356
8	0.689113	0.689172	0.667729
9	0.689302	0.689244	0.713849
10	0.689006	0.689075	0.666464
11	0.689685	0.69314	

Как видно из табл.2, отбрасывание любого из уравнений первых двух групп уравнений системы (17) кроме последних, дает одинаковый, с учетом порядка интерполяции, и верный результат, практически совпадающий со значением $b^*=0.6892$ из табл. 1. Отбрасывание любого из уравнений третьей группы, как и одного из последних уравнений первых двух групп дает результат, отличающийся от истинного в относительно большей или меньшей степени.

После отбрасывания одного из уравнений и нахождения верного значения b^*, система (17) остается переполненной одним уравнением. Отбрасывание еще одного коллокационного уравнения, уже любого, приводит к неверному результату, что четко прослеживается на графиках контактных напряжений. В тоже время, если во все коллокационные уравнения этой системы ввести дополнительную неизвестную, то решение системы будет верным, а значение этой неизвестной – нулем.

Таблица 3. Сравнение с результатами работ [1] и [4].

θ	b^*	a/l [1]	a/b [4]
0.1	0.03645	0.0369	0.0365
0.15	0.17099	-	0.1710
0.2	0.36042	0.366	0.3604
0.25	0.54326	-	0.5432
0.3	0.68912	0.695	0.6891
0.4	0.86455	0.868	-
0.5	0.94111	0.942	0.9410
0.7	0.98735	0.989	-
1	0.99817	0.997	0.9979

В табл.3 представлены значения относительной длины зоны сцепления для различных значений коэффициента трения θ при $\nu = 0.3$, полученные в настоящей работе при $n = 14$ (второй столбец), также в работах [1] (третий столбец) и [4] (четвертый столбец). Сравнение второго и четвертого столбцов показывает очень хорошее совпадение результатов, полученных методом дискретных особенностей и методом Винера-Хопфа. Ввиду этого, исследование поставленной задачи и построение приведенных ниже графиков проводилось на основе численных расчетов при $n = 14$.

На рис.3 показаны графики зависимости относительной длины зоны сцепления b^* от коэффициента трения θ при $\nu = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$, а на рис.4 - графики зависимости той же величины от коэффициента Пуассона ν при $\theta = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$.

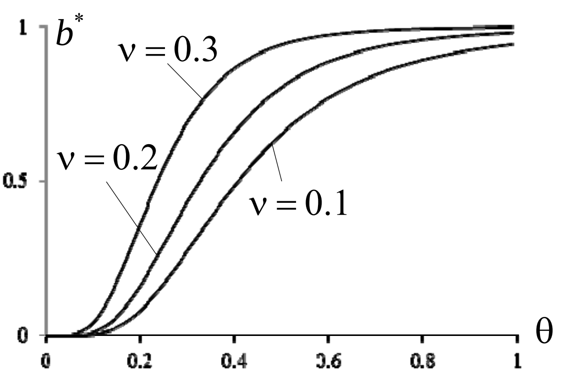

Рис. 3. Зависимость длины зоны сцепления от коэффициента трения

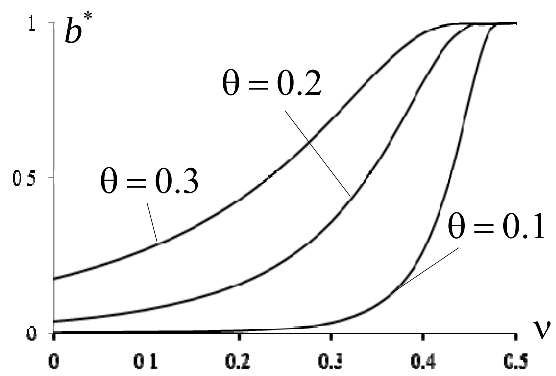

Рис. 4. Зависимость длины зоны сцепления от коэффициента Пуассона

Стремление длины зоны сцепления b^* к нулю при уменьшении коэффициента трения очевидно и это подтверждается рисунком 3. Стремление же b^* к единице при $\nu \to 0.5$, показанное на рис. 4, требует пояснения. Проверим, возможно ли сцепление основания штампа с упругой несжимаемой $(\nu = 0.5)$ полуплоскостью по всей его длине. Из равенств (2) вытекает, что для несжимаемой полуплоскости вертикальная компонента перемещения зависит только от контактного давления, а горизонтальная – только тангенциального контактного напряжения. Тогда, первые два из условий (3), записанные по всей зоне контакта, приводят к раздельным уравнениям относительно каждой из контактных напряжений, решениями которых являются нулевое тангенциальное напряжение и контактное давление из задачи о гладком контакте (без трения). Таким образом, в случае несжимаемой полуплоскости имеем ситуацию, когда задачи о гладком контакте и полном сцеплении совпадают. Действительно, решение задачи о гладком контакте обеспечивает и выполнение условия полного контакта в горизонтальном направлении, поскольку $u(x) \equiv 0$ в силу его независимости от контактного давления (2).

На рис.5 представлены кривые распределения контактного давления и тангенциальных контактных напряжений при $\nu = 0.3$ и $\theta = 0.2,\ 0.3,\ 0.35$, а на рис.6 аналогичные кривые при $\theta = 0.3$ и $\nu = 0.2,\ 0.3,\ 0.35$. Пунктирной линией показано контактное давление при гладком контакте.

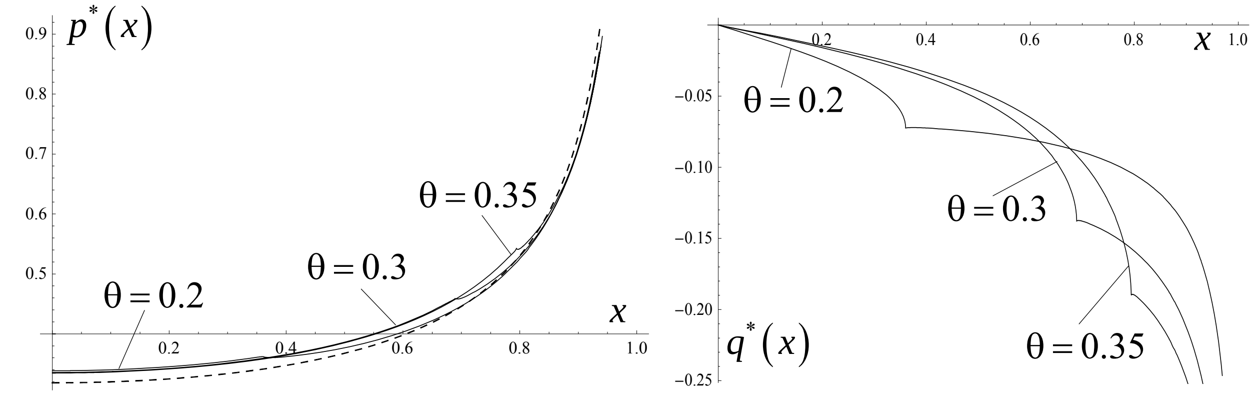

Рис. 5. Распределение контактных напряжений при $\nu = 0.3$ и $\theta = 0.2,\ 0.3,\ 0.35$.

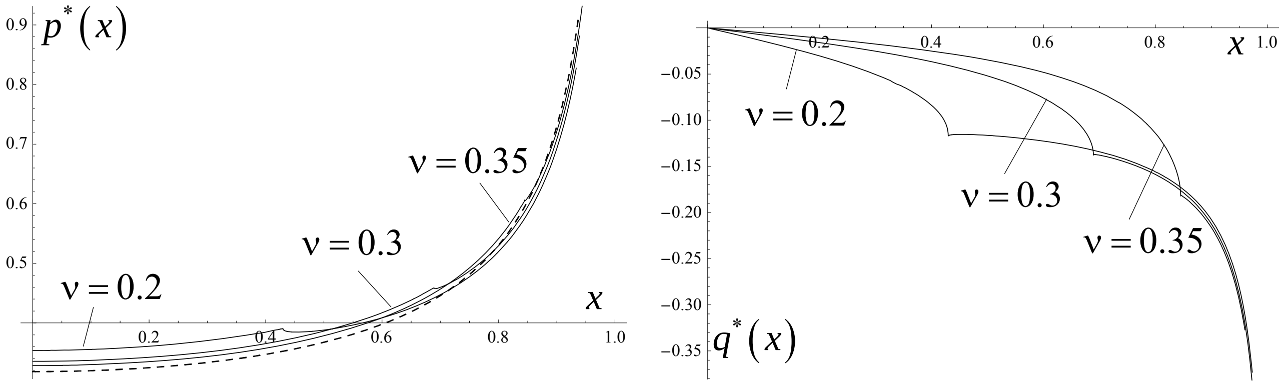

Рис. 6. Распределение контактных напряжений при $\theta = 0.3$ и $\nu = 0.2,\ 0.3,\ 0.35$.

На всех графиках видны характерные изломы в точках раздела зон сцепления и скольжения, которые присутствуют и на графиках работы [4], но отсутствуют на графиках, приведенных в работе [2].

В отличие от сказанного выше о частных случаях $\theta \to 0$ и $\nu \to 0.5$, здесь стремление распределения контактного давления к распределению при гладком контакте более очевидно прослеживается в зависимости от коэффициента Пуассона (рис. 6). Здесь же можно заметить и стремление тангенциального напряжения к нулю при $\nu \to 0.5$, но с обязательным учетом того, что обращение его в бесконечность на крае зоны контакта обусловлено исключительно особенностями подхода к решению задачи.

Заключение. Показана возможность решения задачи Галина путем прямого интегрирования определяющей системы сингулярных интегральных уравнений второго рода. Эта система отличается тем, что составляющие ее уравнения определены не на всем участке контакта, а на его частях, причем местоположение точки их раздела неизвестно и подлежит определению в ходе решения задачи. Для решения полученной системы используется численно-аналитический метод дискретных особенностей, предусматривающий определение показателей особенности поведения решений уравнений системы в окрестности, как концов зоны контакта, так и точки смены условий. Также предусматривается выделение соответствующей весовой функции и применение квадратурных формул наивысшей алгебраической точности, как для регулярных, так и для сингулярных интегралов.

Хорошее совпадение полученных результатов с результатами работы [4], полученными методом Винера-Хопфа, подтверждает их достоверность.

Автор выражает искреннюю благодарность А.А.Амирджаняну за плодотворное обсуждение и существенную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945, т. 9, вып. 5, с. 413-424.
2. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ДАН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1068-1070.
3. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. ПММ, 1991, т. 55, вып. 6, с. 1005-1017.
4. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
5. Sahakyan A.V. Method of Discrete Singularities for Solution of Singular Integral and Integro-Differential Equations. Proc. of A.Razmadze Mathematical Institute. 156 (2011), p.101-111
6. Саакян А.В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов. Сб. науч. трудов “Проблемы механики тонких деформируемых тел”, посв. 80-летию академика С.А.Амбарцумяна. Ереван, 2002, с. 259-265.
7. Лифанов И.К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. ДАН СССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1046-1050.